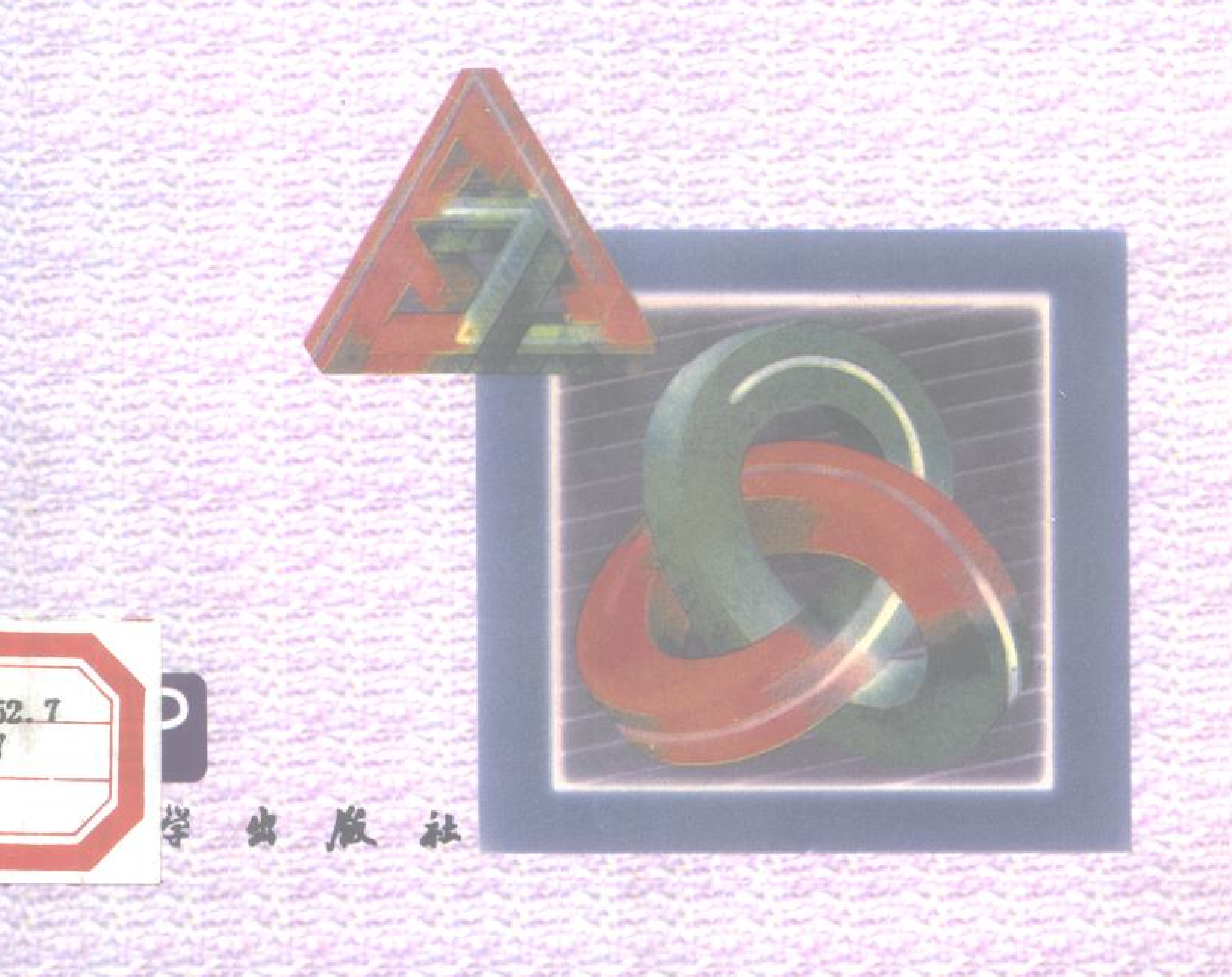
现代数学基础丛书

半群的S-系理论

●刘仲奎 著



学 出 版 社

现代数学基础丛书

半群的 S-系理论

刘仲奎 著

科学出版社
1999

内容简介

本书介绍半群S-系理论的基础知识及最新研究成果. 全书共分七章：第一章是必要的概念及准备，第二、三两章分别讨论投射系和内射系，第四、五、六章讨论和平坦性有关的问题，第七章讨论正则系.

本书力求简明扼要，可作为数学专业研究生的教材，也可作为数学研究工作者的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

半群的S-系理论/刘仲奎著. -北京：科学出版社，1999. 2

（现代数学基础丛书/程民德主编）

ISBN 7-03-006936-6

Ⅰ. 半… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. 半群 Ⅳ. 0152. 7

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 23369 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

北京双青印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1999 年 2 月第　一　版　开本：850×1168 1/32

1999 年 2 月第一次印刷　印张：10 3/8

印数：1—2 000　　字数：268 000

定价：21.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

本书的出版和所论课题的研究工作得到以下基金的资助：

国家自然科学基金（19501007 和 19671063）

甘肃省自然科学基金（ZQ-86-11）

甘肃省教委重点学科基金

西北师范大学皇台学术著作出版基金

甘肃省高等学校青年教师成才奖奖励科研基金

序

与半格，半环，半模，半域诸理论之于格论，环论，模论，域论不同，半群理论，以其特有的研究对象、研究课题和研究方法，早已独立于群论之外．至于在《Mathematical Reviews》的“Mathematics Subject Classification”里，半群的分类编号 20M 属于群的分类编号 20，则是历史造成的习惯上的一种沿用．

在数学史上，“半群”的研究虽可追溯到 1904 年，但其系统的研究却始于 50 年代初，可谓是比较年轻的代数学科．但是，由于许多分析学科和代数学科中各类半群的广泛应用，以及计算机科学，非线性动力系统复杂性理论等数学外部学科对它的巨大推动，至今，已成为基础代数学的一个重要的分支学科．60 年代由 A. H. Clifford 和 G. B. Preston 合著的两卷《半群代数理论》已被公认为国际数学经典著作；70 年代创刊由德国 Springer-Verlag 出版的《Semigroup Forum》是半群理论的一个重要的国际性专门刊物；杂志《Journal of Algebra》和《Communications in Algebra》的编委里有著名半群专家 T. E. Hall 和 J. M. Howie；许多数学家在世界各地开展半群（代数的，序的和拓扑的）理论的专门研究和各层次高级人才的培养（直至博士后）；近 20 年来，几乎每年都举办半群的国际会议．这一切充分说明这样一个事实：半群研究方兴未艾．

半群的 S -系理论是半群代数理论的一个重要部分．该理论其思想部分地来自于群的群作用方法，部分地来自于环的模论方法．将半群的内部特征与由某种类型的 S - 系所构

成的“外部环境”联系起来，形成了半群代数理论研究中的一个重要方法，而这一方法的深入开发自然又形成半群理论的一个重要课题．这个课题，由于大量系统的和深刻的研究成果的出现，已引起了越来越多的关注和研究．Renshaw 从 1986 年到 1991 年利用 S-系方法对半群的融合问题的出色工作，说明这一理论方法在半群代数理论中的应用领域已相当宽广．

国内从 80 年代后期就有我们自己培养的博士进入到这一有着良好发展态势与前景的领域进行研究工作．宋光天博士和刘仲奎博士在这一领域的研究中已获到了一批得到国际上该领域的权威人士认可和好评的研究成果．他们的工作已被国际同行大量引用，从而推动了国内关于该领域研究工作的进一步开展．

刘仲奎博士的专著《半群的 S-系理论》重点介绍了他本人近年的研究工作及国际上这一领域的最新研究成果．该书选题新颖，内容翔实，所述问题大多数是 80 年代后期及 90 年代该领域研究中的热点问题，是第一部关于半群 S-系理论的专著．

作为一个半群与组合半群工作者，我很高兴能为该书作序．相信该书的出版将有利于推动这一领域的研究在国内的发展．

郭聿琦

1998．4．25．

前　言

半群代数理论是本世纪 50 到 60 年代发展起来的一个崭新的代数学分支，它在自动机理论、计算机科学、组合数学、代数表示论、算子代数和概率论等方面都有广泛的应用，因此引起了越来越多的数学家的重视. 对半群的研究方法大体上可分为两种，其一为从半群的内部构件如理想、同余以及特殊元素等出发研究半群的结构与特征；其二为从半群的外部环境如同余格、S-系范畴等出发研究半群的内部特征. 把半群作用在集合上，就得到 S-系，不同的半群可得到不同的 S-系. 利用 S-系的性质把握半群的特征，是本书的主要思想.

半群的 S-系理论其思想部分来自于群的群作用方法，部分来自于环的模论方法. 众所周知，当半群是群时，半群作用即为群作用，它的重要结论之一就是经典的 Sylow 定理. 作为群作用轨道分解的推广，每个 S-系可唯一地分解为不可分 S-系的不交并. 当半群作用在特殊的集合——Abel 群上时，S-系事实上就是整数环上半群环的模. 当 S 是某个环的乘法半群时，S 作用在 Abel 群上在满足必要的条件时即成为环上的模. 半群作用的这几个层次的共同特点，就是将半群的“内部特征”和半群的由作用效果即 S-系范畴所反映的“外部环境”联系起来，即半群具有什么样的“内部特征”当且仅当它具有什么样的作用效果. 事实证明，这种方法可带来单纯的内部刻画方法无法获得的结果，正在国际上受到越来越多的重视.

著者及其一些同事从 80 年代后期在郭聿琦教授的指导

下进入这一领域开展研究工作，获得了一批得到了国际上这一领域的权威人士认可和好评的研究成果，并两次得到国家自然科学基金的资助. 著者在多年的研究工作及研究生培养工作中，深感出版一本该领域专著的必要性. 为了让国内数学界有更多的人投入到这一有着良好发展前景的课题的研究中，同时也为了系统介绍我们自己的研究工作，特撰写出版本书.

本书是根据著者三年来开设的研究生课程《半群的 S-系理论》的讲稿改写而成. 全书共分七章. 第一章是必要的概念及准备，第二、三章分别讨论 S-系的投射性与内射性，第四、五、六章讨论和平坦性相关的问题，第七章讨论 S-系的正则性. 虽然我们使用和环的模理论中相同的名词如投射性、内射性、平坦性等，但和环的模理论相比，半群的 S-系理论内容更加丰富，问题更加困难. 例如对应于平坦模的概念，在 S-系范畴中有平坦，强平坦，弱平坦，均衡平坦，条件（P），条件（E）等互不相同的概念. 本书除介绍 S-系理论的基础知识以外，侧重于介绍著者本人的工作及国际上最新研究成果，使得读者可通过本书接触到前沿的工作.

由于时间仓促，我们十分遗憾这一领域中许多很有意义且十分优美的成果未能写入本书，例如 J. Renshaw 关于半群融合理论的工作以及 V. Gould 关于 S-系的纯性的工作. 不过有了本书所讲述的基础知识，读者阅读有关文献基本上不再有困难.

本书中我们尽量使用通用记号. 定理 4.3.7 表示第四章第三节中的定理 7，而定理 3.7 表示本章第三节中的定理 7.

受水平所限，书中错误难免且取材可能不当，敬请读者批评指正.

著者衷心感谢导师熊全淹教授和郭聿琦教授多年来的指导、帮助与鼓励，同时还要感谢香港中文大学的 K. P. Shum 教授、加拿大 Wilfrid Laurier 大学的 S. Bulman-

Fleming 教授和德国 Oldenburg 大学的 U. Knauer 教授对我们工作的支持与鼓励，也感谢西北师范大学数学系的马勤生先生对本书所做的精致编排和大力支持，由于他们的大力协助才使本书得以尽早面世.

刘仲奎

1997. 5. 8.

目　　录

第一章　基本概念

§1　S-系

设 S 是幺半群，1 为其单位元，A 是非空集合. 若有 $S\times A$ 到 A 的映射 $f:S\times A\rightarrow A$ 满足

$$f(t,f(s,a))=f(ts,a),\quad \forall\, t,s\in S,\forall\, a\in A,$$

则称 (A,f) 是左 S- 系，或称 S 左作用于 A 上. 为了方便起见，我们记 $f(s,a)=sa$，于是上式变为

$$t(sa)=(ts)a,\quad \forall\, t,s\in S,\forall\, a\in A.$$

此时，左 S- 系 (A,f) 简记为 ${}_SA$ 或 A.

如果 A 还满足

$$1a=a,\quad \forall\, a\in A,$$

则称 A 是单式左 S- 系. 我们以下除特殊声明以外，S- 系均指单式左 S- 系.

同样的方法可以定义右 S- 系.

设 A 是 S- 系，B 是 A 的非空子集合. 若对任意 $b\in B$，任意 $s\in S$，都有 $sb\in B$，则称 B 是 A 的子系，记为 $B\leqslant A$.

显然 $A\leqslant A$. 若 S 中含有零元 0，则对于任意 $a\in A$，$\{0a\}\leqslant A$.

下面的命题是不证自明的.

命题 1.1　S- 系 A 的任意多个子系的交若非空，则仍为子系.

设 M 是 S- 系 A 的非空子集合，则 A 的包含 M 的最小子系是所有包含 M 的子系之交，称为由 M 生成的子系，记为 $\langle M\rangle$，M 称为子系 $\langle M\rangle$ 的生成集. 显然有

$$\langle M\rangle = \{sm \mid s \in S, m \in M\}.$$

若我们记 $Sm = \{sm \mid s \in S\}$，则有

$$\langle M\rangle = \bigcup_{m\in M} Sm.$$

若 $M = \{m_1, \cdots, m_n\}$ 为有限集合，则称 $\langle M\rangle = Sm_1 \cup \cdots \cup Sm_n$ 为有限生成子系. 特别地，由一个元素 m 生成的子系 Sm 称为循环子系. 若 A 可由一个(有限个)元素生成，则称 A 是循环(有限生成)系. 例如，对于任意 $s \in S$，S 的主左理想 Ss 即为 S- 系 S 的循环子系，特别地 S 为循环 S- 系.

设 λ 是 S- 系 A 上的等价关系，若 λ 满足

$$(a,b) \in \lambda \Rightarrow (sa, sb) \in \lambda, \quad \forall\, s \in S, \forall\, a, b \in A,$$

则称 λ 为 A 上的同余. 在 A 关于同余 λ 的商集 A/λ 上定义左 S- 作用：

$$s(a\lambda) = (sa)\lambda, \quad \forall\, s \in S, \forall\, a \in A,$$

则容易验证 A/λ 关于上述左 S- 作用构成一个 S- 系，称为 A 关于 λ 的商系.

设 $B \leqslant A$，如下定义 A 上的关系：

$$a\lambda_B b \Leftrightarrow a = b \text{ 或 } a, b \in B.$$

容易验证 λ_B 是 A 上的同余，称其为由 B 决定的 Rees 同余，简称为 Rees 同余. 称商系 A/λ_B 为 Rees 商.

类似于子系的生成集概念，我们也可以考虑同余的生成集. 首先，下面的命题是明显的.

命题 1.2 S- 系 A 上的任意多个同余的交仍为同余.

设 H 为 $A \times A$ 的非空子集合，则 A 上的包含 H 的最小同余是所有包含 H 的同余之交，称为由 H 生成的同余，记为 $\lambda(H)$. H 称为同余 $\lambda(H)$ 的生成集. 显然生成集是不唯一的.

命题 1.3 设 H 是 $A \times A$ 的非空子集合，$a, b \in A$，则 $a\lambda(H)b$ 当且仅当 $a = b$ 或者存在 $t_1, \cdots, t_n \in S$，使得

$$a = t_1c_1, t_1d_1 = t_2c_2, \cdots, t_{n-1}d_{n-1} = t_nc_n, t_nd_n = b,$$

其中 $(c_i, d_i) \in H$ 或 $(d_i, c_i) \in H$，$i = 1, 2, \cdots, n$.

证明 在 A 上定义如下关系 σ：

$$a\sigma b \Leftrightarrow a = b\text{，或者存在 } t_1,\cdots,t_n \in S\text{，}$$
$$\text{使得 } a = t_1c_1, t_1d_1 = t_2c_2, \cdots,$$
$$t_{n-1}d_{n-1} = t_nc_n, t_nd_n = b\text{，其中}$$
$$(c_i,d_i) \in H \text{ 或 } (d_i,c_i) \in H,$$
$$i = 1,\cdots,n.$$

容易验证 σ 是 A 上的同余关系，且 $H \subseteq \sigma$. 设 λ 是 A 上的同余且 $H \subseteq \lambda$，则对于任意 $(a,b) \in \sigma$，有 $a = b$，或者

$$a = t_1c_1\lambda t_1d_1 = t_2c_2\lambda t_2d_2 = \cdots\lambda t_{n-1}d_{n-1} = t_nc_n\lambda t_nd_n = b.$$

所以 $\sigma \subseteq \lambda$. 即 σ 是 A 上包含 H 的最小同余. 根据定义即有 $\sigma = \lambda(H)$. 结论得证. //

设 A,B 都是 S-系. 称映射 $f:A \to B$ 为从 A 到 B 的 S-同态，如果

$$f(sa) = sf(a), \quad \forall\, s \in S, \forall\, a \in A.$$

例如，设 λ 是 A 上的同余，令 $B = A/\lambda$，则自然的映射

$$\lambda^{\#}: A \to B,$$
$$a \mapsto a\lambda$$

即为从 A 到 B 的 S-同态.

从 A 到 B 的所有 S-同态的集合记为 $\mathrm{Hom}_S(A,B)$ 或 $\mathrm{Hom}(A,B)$. 若 S-同态 $f:A \to B$ 还是单、满映射，则称 f 为同构. 这时也说 S-系 A 和 B 同构，记为 $A \simeq B$.

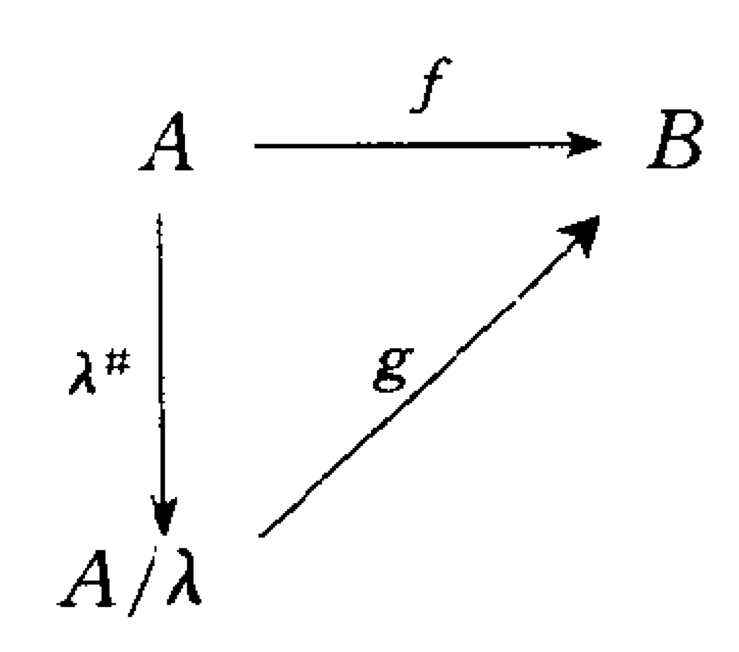
设 $f:A \to B$ 是 S-同态. 称集合

$$\{(a,a') \in A \times A \mid f(a) = f(a')\}$$

为 f 的核，记为 $\mathrm{Ker}f$. 显然有

命题 1.4 任意 S-同态 $f:A \to B$ 的核 $\mathrm{Ker}f$ 是 A 上的同余. S-满同态 f 为同构当且仅当 $\mathrm{Ker}f$ 是 A 上的单位同余.

定理 1.5(同态基本定理) 设 $f:A \to B$ 是 S-同态，λ 是 A 上的同余且 $\lambda \subseteq \mathrm{Ker}f$，则存在唯一同态 $g:A/\lambda \to B$ 使得下图可换：



若 $\lambda = \mathrm{Ker}f$，则 g 是单同态. 若 f 还是满同态，则 g 也是满同态. 特别地当 f 是满同态时有

$$A/\mathrm{Ker}f \simeq B.$$

证明 若 $(a,a') \in \lambda$，则 $(a,a') \in \mathrm{Ker}f$，因此有 $f(a) = f(a')$. 所以我们可以如下定义映射 $g: A/\lambda \to B$：

$$g(a\lambda) = f(a), \quad \forall\, a \in A.$$

容易证明 g 还是 S-同态，且使得上图可换.

设 $g': A/\lambda \to B$ 也满足 $g'\lambda^{\#} = f$，则对任意 $a\lambda \in A/\lambda$，$g'(a\lambda) = g'\lambda^{\#}(a) = f(a) = g\lambda^{\#}(a) = g(a\lambda)$，所以 $g' = g$.

设 $\lambda = \mathrm{Ker}f$，则 $g(a\lambda) = g(a'\lambda) \Rightarrow f(a) = f(a') \Rightarrow (a,a') \in \mathrm{Ker}f = \lambda \Rightarrow a\lambda = a'\lambda$. 即 g 是单同态.

若 f 是满同态，则显然 g 也是满同态. 从已证的结果立即可得 $A/\mathrm{Ker}f \simeq B$. //

推论 1.6 设 λ,σ 是 A 上的同余且 $\lambda \subseteq \sigma$，则有 S-系的同构式

$$A/\lambda\big/\sigma/\lambda \simeq A/\sigma,$$

其中 $\sigma/\lambda = \{(a\lambda, b\lambda) \mid (a,b) \in \sigma\}$.

证明 定义 S-同态 $f: A/\lambda \to A/\sigma$ 为 $f(a\lambda) = a\sigma$，则 $\mathrm{Ker}f = \sigma/\lambda$. 由定理 1.5 即得结论. //

设 S,T 都是幺半群，若 A 既是左 S-系，又是右 T-系，且对任意 $a \in A$，任意 $s \in S$，任意 $t \in T$，有

$$(sa)t = s(at),$$

则称 A 是左 S-右 T-系，记为 ${}_SA_T$. 例如 S 是左 S-右 S-系. 若 A 是左 S-系，H 是 A 的自同态幺半群，则 A 是左 S-右 H-系（约定 $f \in H$ 作用在 $a \in A$ 上的结果为 $(a)f$）.

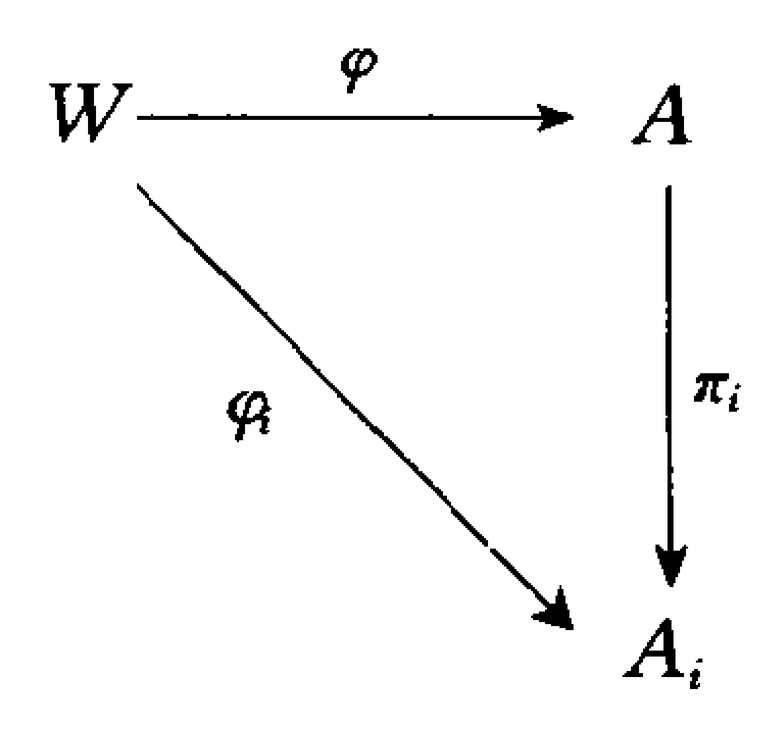
§2 直积 余直积

所有左 S- 系以及左 S- 系之间的 S- 同态构成一个范畴，称为左 S- 系范畴，记为 S-Act. 同样，所有右 S- 系以及右 S- 系之间的 S- 同态构成一个范畴，称为右 S- 系范畴，记为 Act-S. 本节考虑范畴 S-Act 中的直积和余直积. 我们先从一般的定义开始.

设$\mathbb{C}$是范畴，$\{A_i \mid i \in I\}$ 是$\mathbb{C}$中的一簇对象. $\mathbb{C}$中的对象 A 叫做 $\{A_i \mid i \in I\}$ 的直积，如果

(1) 对任意 $i \in I$，存在态射 $\pi_i: A \to A_i$；

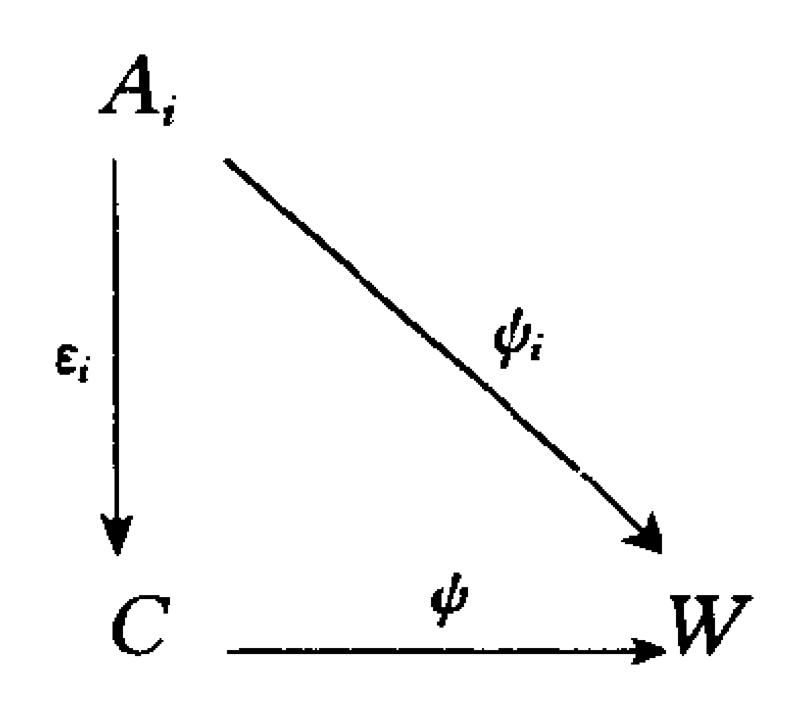
(2) 对任意对象 $W \in \mathbb{C}$，若存在态射 $\varphi_i: W \to A_i, i \in I$，则存在唯一态射 $\varphi: W \to A$ 使得下图可换：



对偶地可定义余直积. $\mathbb{C}$ 中的对象 C 叫做$\{A_i \mid i \in I\}$ 的余直积，如果

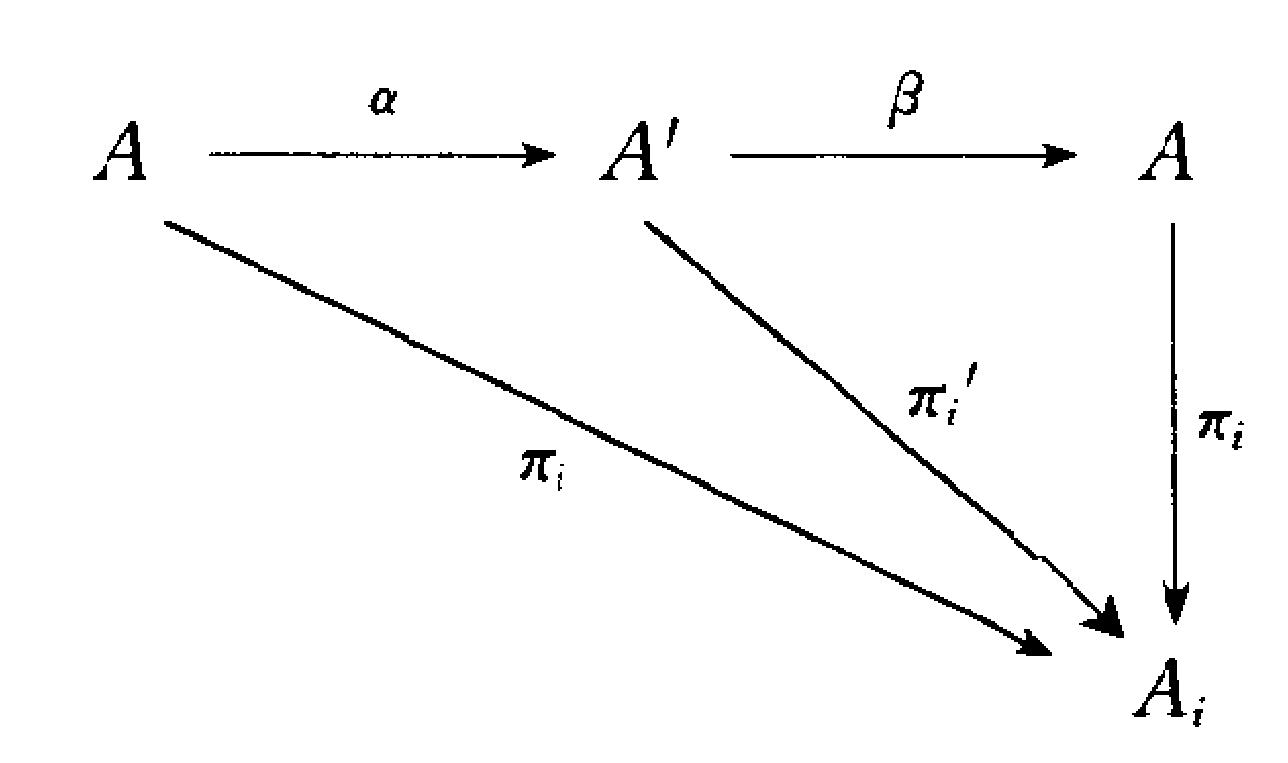
(1) 对任意 $i \in I$，存在态射 $\varepsilon_i: A_i \to C$；

(2) 对任意对象 $W \in \mathbb{C}$，若存在态射 $\psi_i: A_i \to W, i \in I$，则存在唯一态射 $\psi: C \to W$ 使得下图可换：



对于给定的一簇对象 $\{A_i \mid i \in I\}$，容易证明其直积和余直积

若存在，则必是唯一的（在同构的意义下）. 例如，设 A 和 A' 都是 $\{A_i \mid i \in I\}$ 的直积，则存在态射 $\pi_i : A \to A_i$ 和 $\pi_i' : A' \to A_i, i \in I$. 因此存在态射 $\alpha : A \to A'$ 和 $\beta : A' \to A$ 使得下图可换：



所以对任意 $i \in I$，$\pi_i \beta\alpha = \pi_i$. 显然 $\pi_i 1_A = \pi_i$. 所以由唯一性即知 $\beta\alpha = 1_A$. 同理可知 $\alpha\beta = 1_{A'}$. 所以 $A \simeq A'$. 同样的方法可以证明余直积在同构的意义下也是唯一的.

所以我们记 $\{A_i \mid i \in I\}$ 的直积和余直积分别为 $\prod_{i \in I} A_i$ 和 $\coprod_{i \in I} A_i$.

在 S- 系范畴 S-Act 中，直积和余直积具有非常简单的表达：它们分别是卡氏积和不交并.

设 $\{A_i \mid i \in I\}$ 是一簇 S- 系. 作 A_i 的卡氏积 $B = \{(a_i)_{i \in I} \mid a_i \in A_i\}$. 按分量规定 S 在 B 上的左作用，即任意 $s \in S$，任意 $b = (a_i)_{i \in I}$，规定 $sb = (sa_i)_{i \in I}$，则 B 是左 S- 系. 对任意 $i \in I$，规定 S- 同态 $\pi_i : B \to A_i$ 为

$$\pi_i((a_i)_{i \in I}) = a_i.$$

若 W 是 S- 系，且对任意 $i \in I$，有 S- 同态 $\varphi_i : W \to A_i$，则可规定映射 $\varphi : W \to B$ 为

$$\varphi(w) = (\varphi_i(w))_{i \in I}, \quad \forall\, w \in W.$$

显然 φ 是 S- 同态，并且 $\pi_i \varphi(w) = \pi_i(\varphi_i(w))_{i \in I} = \varphi_i(w)$，所以 $\pi_i \varphi = \varphi_i$. 若还有 S- 同态 $\varphi' : W \to B$ 也满足 $\pi_i \varphi' = \varphi_i$，则对任意 $i \in I$，$\pi_i \varphi'(w) = \pi_i \varphi(w)$，所以 $\varphi'(w) = \varphi(w)$，$\forall\, w \in W$. 所以 $\varphi = \varphi'$. 这即证明了 φ 的唯一性. 因此由定义即知 B 为 $\{A_i \mid i \in I\}$ 的直积. 即有

命题 2.1 在 S- 系范畴 S-Act 中，任意一簇 S- 系的直积同构于它们的卡氏积.

下面我们考虑 S- 系 $\{A_i \mid i \in I\}$ 的余直积. 作不交并 $B = \dot{\bigcup}_{i \in I} A_i$. 设 $s \in S$. 对任意 $b \in B$，存在唯一的 i，使得 $b \in A_i$. 所以可按照 S 在 A_i 上的左作用来定义 sb. 因此 B 可作成一个 S- 系. 对于任意 $i \in I$，显然有自然的包含同态 $\varepsilon_i : A_i \to B$. 设 W 是 S- 系且存在 S- 同态 $\psi_i : A_i \to W, i \in I$. 我们如下定义映射 $\psi : B \to W$，

$$\psi(b) = \psi_i(b), \quad \forall\, b \in B,$$

其中 i 满足 $b \in A_i$（由 B 的构造可知对于给定的 b，满足 $b \in A_i$ 的 i 是唯一的）. 显然 ψ 是 S- 同态. 对任意 $i \in I$，任意 $a_i \in A_i$，$\psi\varepsilon_i(a_i) = \psi(a_i) = \psi_i(a_i)$，所以有 $\psi\varepsilon_i = \psi_i$. 设还有 S- 同态 $\psi' : B \to W$ 也满足 $\psi'\varepsilon_i = \psi_i$，则对任意 $i \in I$，任意 $a_i \in A_i$，$\psi\varepsilon_i(a_i) = \psi'\varepsilon_i(a_i)$，所以 $\psi\varepsilon_i = \psi'\varepsilon_i$，从而 $\psi = \psi'$. 这就证明了 ψ 的唯一性. 由定义即知 B 为 $\{A_i \mid i \in I\}$ 的余直积. 总结以上结论，我们有

命题 2.2 在 S- 系范畴 S-Act 中，任意一簇 S- 系的余直积同构于它们的不交并.

设幺半群 S 中含有零元. 此时任意 S- 系 A 中必有元素 θ 满足

$$s\theta = \theta, \quad \forall\, s \in S.$$

当然这种元素 θ 也许不唯一. 称 S- 系 A 是中心的，如果 A 中存在一个固定元素 θ 满足

$$s\theta = \theta, 0a = \theta, \quad \forall\, s \in S, \forall\, a \in A.$$

显然这样的元素 θ 是唯一的. 我们称 θ 为 A 的零元，记为 θ_A.

设 A, B 都是中心 S- 系，$f : A \to B$ 是 S- 同态，则显然有 $f(\theta_A) = f(0\theta_A) = 0f(\theta_A) = \theta_B$，即 f 把 A 的零元变为 B 的零元. 又若 $C \leqslant A$，则 $\theta_C = \theta_A$.

所有中心 S- 系以及 S- 系之间的 S- 同态构成一个范畴，我们记之为 S^0-Act，它是 S-Act 的全子范畴. 下面我们在范畴 S^0-Act 中考虑余直积.

设$\{A_i|i \in I\}$是中心S-系. 令

$$B = \{\theta\} \cup \left(\dot{\bigcup_{i\in I}}(A_i - \{\theta_{A_i}\})\right).$$

如下规定S在B上的左作用：任意$s \in S$，任意$b \in B$，若$b = \theta$，则规定$sb = \theta$；若$b \in A_i - \{\theta_{A_i}\}$，则规定

$$sb = \begin{cases} \theta, & \text{若 } sb = \theta_{A_i}, \\ \text{按原来的定义}, & \text{否则}. \end{cases}$$

容易验证B是一个S-系，且是中心的，其零元为θ. 我们称B是$\{A_i|i \in I\}$的零直并，记为$B = \bigcup_{i\in I}^{0} A_i$. 简单地说，零直并$B$即为$A_i$ $(i \in I)$的并，但A_i和$A_j (j \neq i)$中的非零元都是B中的不同元，而把$A_i (i \in I)$中的零元都看成同一个元θ.

命题 2.3 在范畴S^0-Act中，任意一簇S-系的直积和余直积分别同构于它们的卡氏积和零直并.

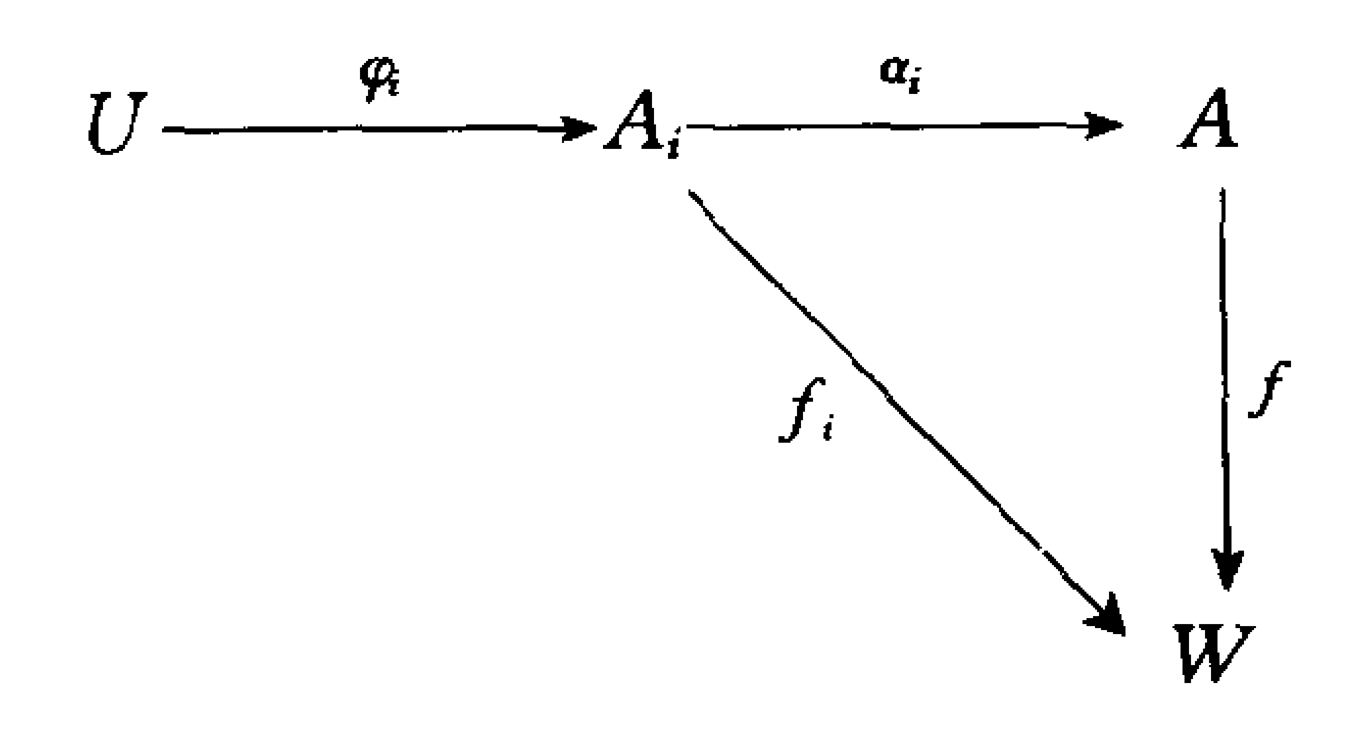
证明 仿命题2.1和2.2的证明. //

下面考虑零直并概念的推广. 为此先考虑如下的泛问题：

设$\{A_i|i \in I\}$和U都是S-系，$\varphi_i: U \to A_i$是S-单同态. S-系A和S-同态$\alpha_i: A_i \to A (i \in I)$称为$(A_i, \varphi_i)$的融合余积，如果

(1) 对任意$i, j \in I$，$\alpha_i\varphi_i = \alpha_j\varphi_j$；

(2) 对任意S-系W和S-同态$\{f_i \in \mathrm{Hom}_S(A_i, W) | f_i\varphi_i = f_j\varphi_j, \forall\, i, j \in I\}$，存在唯一的$S$-同态$f: A \to W$，使得对任意$i \in I$，下图可换：



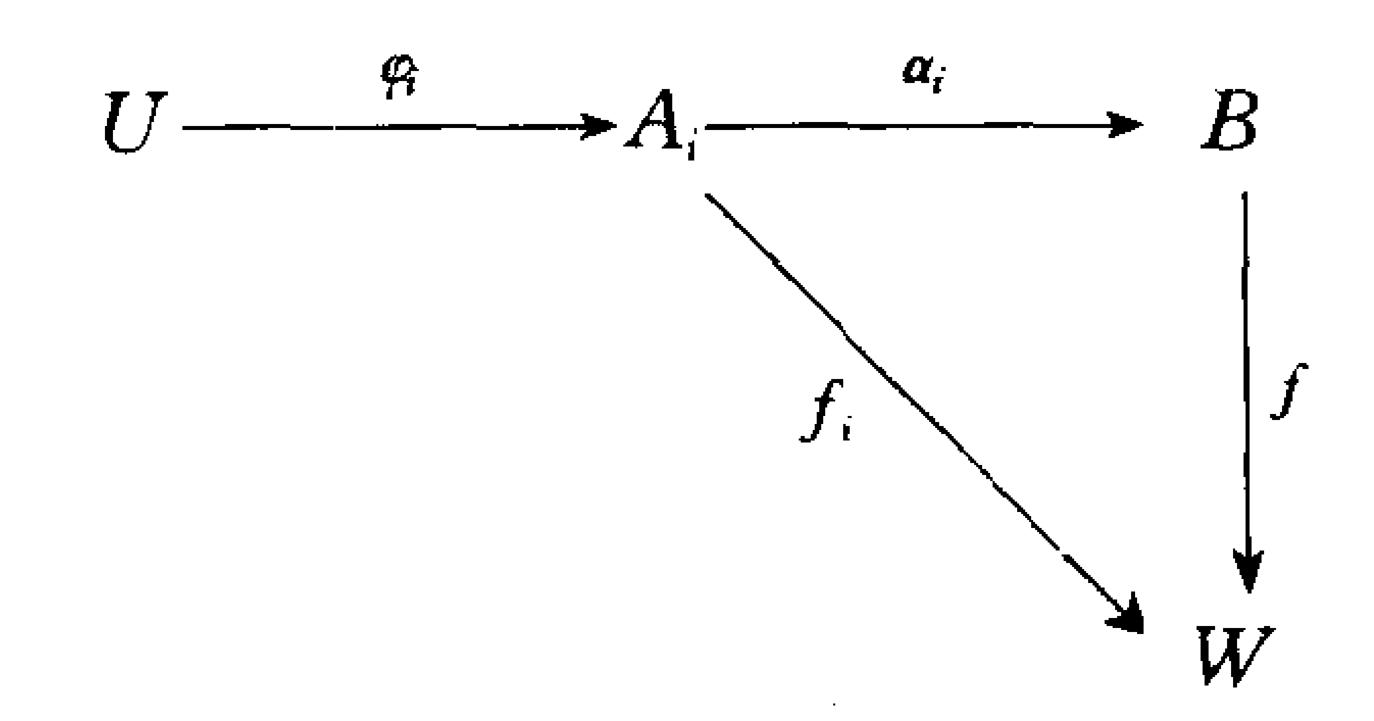
容易证明，融合余积在同构的意义下是唯一的.

命题 2.4 融合余积是存在的.

证明 继续使用上述定义中的记号. 令

$$B = U \dot{\bigcup} \left(\dot{\bigcup_{i \in I}} (A - \mathrm{Im}\varphi_i) \right),$$

对任意 $s \in S$，$x \in A - \mathrm{Im}\varphi_i$，若 $sx \in \mathrm{Im}\varphi_i$，则 $sx = \varphi_i(u)$，$u \in U$. 此时规定 $s \cdot x = u$. 其他情形按自然方式定义，于是 B 成为 S-系. 规定 $\alpha_i : A_i \to B$ 如下：若 $a_i \in A_i - \mathrm{Im}\varphi_i$，则 $\alpha_i(a_i) = a_i$；若 $a_i \in \mathrm{Im}\varphi_i$，则存在唯一的 $u \in U$，使得 $\varphi_i(u) = a_i$，此时规定 $\alpha_i(a_i) = u$. 容易证明 α_i 是 S-同态，且对任意 $i, j \in I$ 有 $\alpha_i\varphi_i = \alpha_j\varphi_j$. 设有 S-系 W 及 S-同态 $f_i : A_i \to W$，满足 $f_i\varphi_i = f_j\varphi_j (\forall\, i, j \in I)$. 如下定义映射 $f : B \to W$：若 $x \in U$，则规定 $f(x) = f_i\varphi_i(x)$；若 $x \in A_i - \mathrm{Im}\varphi_i$，则规定 $f(x) = f_i(x)$，$i \in I$. 显然 f 是 S-同态，且对任意 $i \in I$，有如下的交换图：



设 $f' : B \to W$ 也满足上述交换图，则对任意 $x \in B$，若 $x \in U$，则 $\varphi_i(x) \in A_i$，所以 $f(x) = f\alpha_i(\varphi_i(x)) = f_i(\varphi_i(x)) = f'\alpha_i(\varphi_i(x)) = f'(x)$；若 $x \in A_i - \mathrm{Im}\varphi_i$，则 $f(x) = f\alpha_i(x) = f_i(x) = f'\alpha_i(x) = f'(x)$. 因此满足上述交换图的 f 是唯一的. 这就证明了融合余积的存在性. //

设 I 是幺半群 S 的左理想，且 $I \neq S$，x, y, z 是三个符号，令

$$(S, x) = \{(s, x) \mid s \in S\},$$
$$(S, y) = \{(s, y) \mid s \in S\},$$
$$(I, z) = \{(s, z) \mid s \in I\},$$

按自然的方式可定义 S 在 (S, x)，(S, y)，(I, z) 上的左作用. 令

$$\varphi_x : (I, z) \to (S, x), \quad (s, z) \mapsto (s, x);$$
$$\varphi_y : (I, z) \to (S, y), \quad (s, z) \mapsto (s, y),$$

则 φ_x, φ_y 为 S-单同态. 记 $A(I)$ 为 $((S, x), (S, y), \varphi_x, \varphi_y)$ 的融合余积，则由命题 2.4 知

$$A(I) = (I, z) \dot{\bigcup} \{(s, x) \mid s \in S - I\}$$

$$\dot{\bigcup} \{(s,y) \mid s \in S - I\}.$$

S 在 $A(I)$ 上的左作用为

$$s(t,z) = (st,z),$$

$$s(t,x) = \begin{cases} (st,x), & 若\ st \in S - I, \\ (st,z), & 若\ st \in I, \end{cases}$$

$$s(t,y) = \begin{cases} (st,y), & 若\ st \in S - I, \\ (st,z), & 若\ st \in I. \end{cases}$$

显然$(S,x) \simeq S(1,x)$,$(S,y) \simeq S(1,y)$,所以 $A(I) = S(1,x) \cup S(1,y)$,且 $S(1,x) \cap S(1,y) = \{(s,z) \mid s \in I\} = (I,z)$.

S- 系 $A(I)$ 我们以后要经常用到.

设 S 是含零幺半群,$\{A_i \mid i \in I\}$ 是一簇中心左 S- 系,令 $U = \{0\}$,$\varphi_i: U \to A_i$ 为 $\varphi_i(0) = \theta_{A_i}$,则$(A_i,\varphi_i)$ 的融合余积为 $B = \{0\} \dot{\cup} \left(\dot{\bigcup}_{i \in I}(A_i - \{\theta_{A_i}\})\right)$,即为$\{A_i \mid i \in I\}$ 的零直并. 所以融合余积概念是零直并的推广.

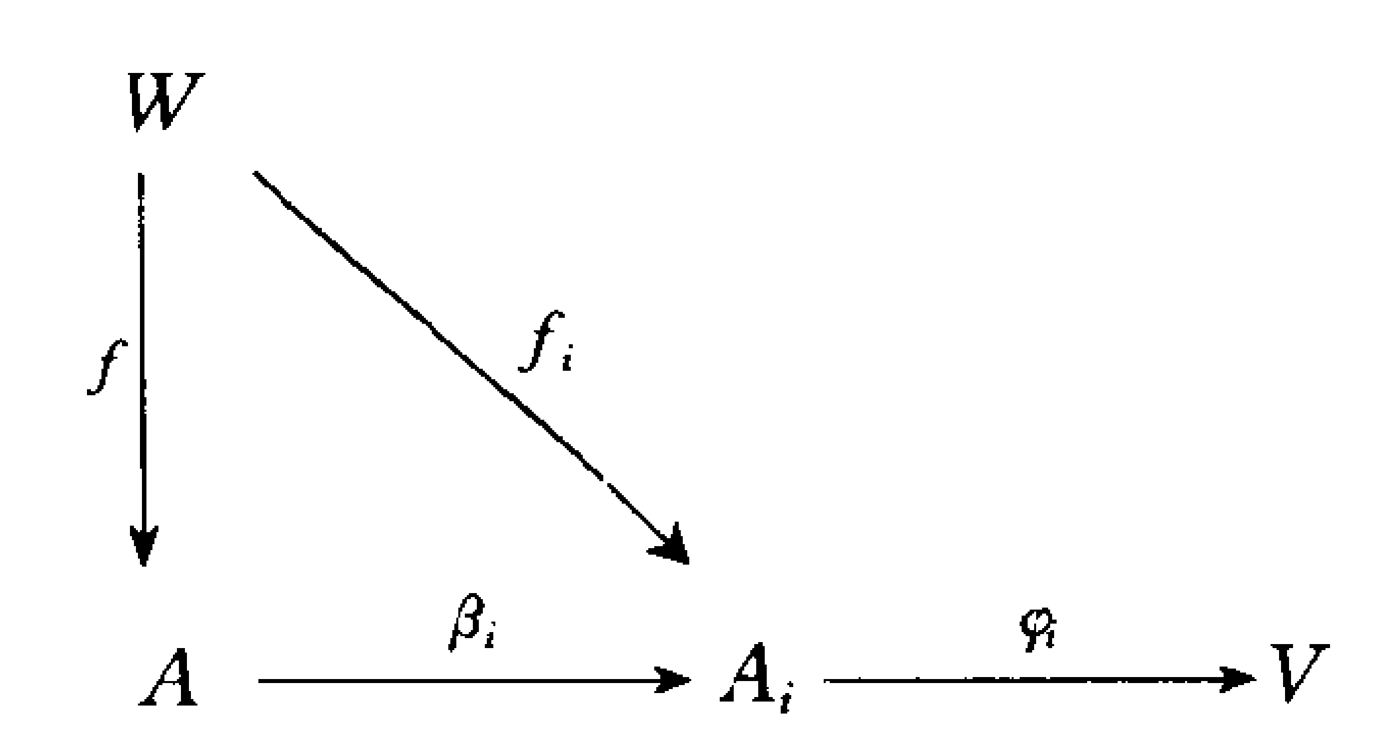
显然当$U = \varnothing$ 时,融合余积即为通常的余积(命题2.2),所以融合余积概念也是余积的推广.

下面考虑融合余积的对偶概念:余融合积.

设$\{A_i \mid i \in I\}$ 和 V 都是 S- 系,$\varphi_i: A_i \to V$ 是 S- 满同态. S- 系 A 和 S- 同态 $\beta_i: A \to A_i (i \in I)$ 称为(A_i,φ_i) 的余融合积,如果

(1) 对任意 $i,j \in I$,$\varphi_i\beta_i = \varphi_j\beta_j$;

(2) 对任意 S- 系 W 和 S- 同态$\{f_i \in \mathrm{Hom}_S(W,A_i) \mid \varphi_i f_i = \varphi_j f_j, \forall\ i,j \in I\}$,存在唯一的 S- 同态 $f: W \to A$,使得对任意$i \in I$,下图可换:



显然，余融合积在同构的意义下是唯一的.

命题 2.5 设 A_i,φ_i,V 同上，令

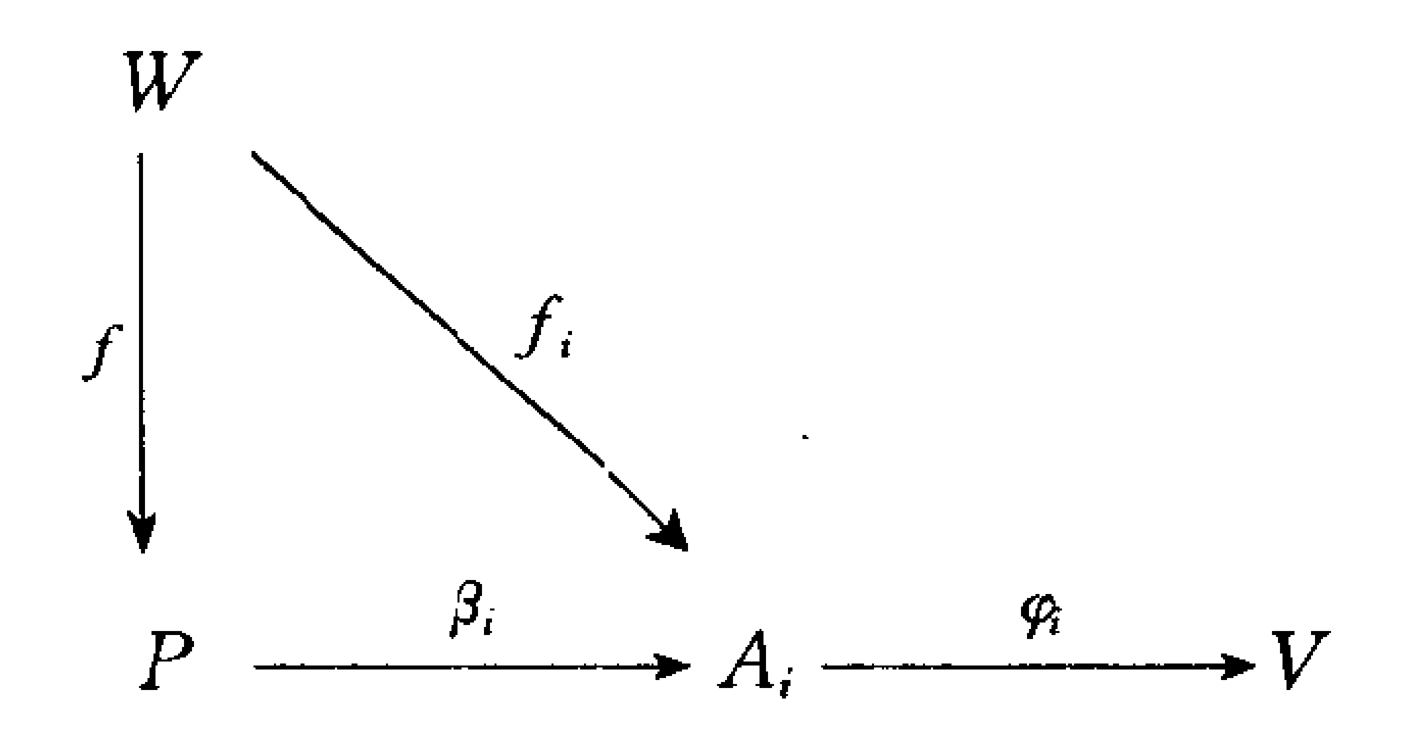
$$P=\left\{(a_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}A_i\,|\,\varphi_i(a_i)=\varphi_j(a_j),\forall\, i,j\in I\right\},$$

则 P 按自然的方式构成 S-系. 记 $\beta_i:P\to A_i(i\in I)$ 是自然的投射，则 P 和 $\beta_i(i\in I)$ 是 (A_i,φ_i) 的余融合积.

证明 显然对任意 $i,j\in I$ 有 $\varphi_i\beta_i=\varphi_j\beta_j$. 设 W 是 S-系，f_i: $W\to A_i$ 满足对任意 $i,j\in I$ 有 $\varphi_i f_i=\varphi_j f_j$，定义 $f:W\to P$ 为

$$f(x)=(f_i(x))_{i\in I},\quad \forall\, x\in W.$$

容易证明 f 是 S-同态，且使得下图交换：



易证 f 也是唯一的. //

记 (A_i,φ_i) 的余融合积为 $\prod_{i\in I}{}_V A_i$，则显然有 $\prod_{i\in I}{}_V A_i\leqslant\prod_{i\in I}A_i$. 若 V 是单元 S-系，则 $\prod_{i\in I}{}_V A_i$ 即为 $\prod_{i\in I}A_i$.

记 $P_i:\prod_{i\in I}A_i\to A_i$ 为自然的投射$(i\in I)$. 子系 $A\leqslant\prod_{i\in I}A_i$ 称为 $\{A_i\,|\,i\in I\}$ 的次直积，如果对所有 $i\in I$ 都有 $P_i(A)=A_i$.

命题 2.6 余融合积是次直积.

证明 设 $A=\prod_{i\in I}{}_V A_i$ 是余融合积. 因为 φ_i 是满同态，所以对任意 $a_j\in A_j$，存在 $a_i\in A_i$ 使得 $\varphi_i(a_i)=\varphi_j(a_j)(i\in I)$. 因此 $A_j=P_j\left(\prod_{i\in I}{}_V A_i\right)$. //

§3　不可分 S-系

定义 3.1　S-系 A 叫做可分的，如果存在 A 的非空子系 A_1 和 A_2，使得 $A = A_1 \dot{\cup} A_2$. 否则就称 A 是不可分的.

命题 3.2　任意循环 S-系是不可分的.

证明　设 $A = Sx$ 是循环 S-系. 若 $A = A_1 \dot{\cup} A_2$，则 $x \in A_1$ 或 $x \in A_2$，因此 $A = A_1$ 或 $A = A_2$. 所以 A 是不可分的.　　//

命题 3.3　设 $\{A_i | i \in I\}$ 是 S-系 A 的一簇不可分子系. 若 $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$，则 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 仍是 A 的不可分子系.

证明　设 $\bigcup_{i \in I} A_i = M \dot{\cup} N$. 再设 $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$，则 $x \in M \dot{\cup} N$. 不妨假定 $x \in M$，则对任意 $i \in I$，$x \in M \cap A_i$. 显然有 $A_i = (M \cap A_i) \dot{\cup} (N \cap A_i)$. 所以由 A_i 的不可分性即知 $N \cap A_i = \varnothing$. 由 i 的任意性即知 $N = \varnothing$.　　//

由命题 3.2 知任意循环系是不可分的. 下述命题告诉我们，不可分 S-系不一定是循环的.

命题 3.4　任意不可分 S-系是循环的当且仅当 S 是群.

证明　设 S 是群，A 是不可分 S-系. 任取 $a \in A$. 若 $A - Sa = \varnothing$，则 $A = Sa$，即 A 是循环的. 下设 $A - Sa \neq \varnothing$. 因为 $A = Sa \dot{\cup} (A - Sa)$，所以由 A 的不可分性即知 $A - Sa$ 不是子系. 因此存在 $b \in A - Sa$ 和 $t \in S$ 使得 $tb \in Sa$. 所以 $b = t^{-1}tb \in t^{-1}Sa \subseteq Sa$. 这和 $b \in A - Sa$ 矛盾.

设 L 是 S 的真左理想. 考虑 §2 中构造的 S-系 $A(L)$. 显然 $A(L) = S(1,x) \cup S(1,y)$，且 $S(1,x) \cap S(1,y) \neq \varnothing$. 所以由命题 3.2 和 3.3 即知 $A(L)$ 是不可分的. 但是 $A(L)$ 不是循环的，从而得到矛盾. 矛盾说明 S 没有真的左理想，因此 S 是群.　　//

下面的定理是本节的主要结果.

定理 3.5 任意 S- 系 A 可唯一地分解成不可分 S- 子系的不交并.

证明 任取 $x \in A$,则 Sx 是不可分的. 令

$$\mathscr{D}_x = \{B \mid B \text{ 是 } A \text{ 的不可分子系且 } x \in B\}.$$

因为 $Sx \in \mathscr{D}_x$,所以 $\mathscr{D}_x \neq \varnothing$. 显然 $\bigcap_{B \in \mathscr{D}_x} B \neq \varnothing$. 所以由命题 3.3 知 $A_x = \bigcup_{B \in \mathscr{D}_x} B$ 是不可分的. 显然 A_x 是包含 x 的最大的不可分子系. 设 $x, y \in A$. 如果 $A_x \cap A_y \neq \varnothing$,则由命题 3.3 知 $A_x \cup A_y$ 也是不可分的. 又 $x, y \in A_x \cup A_y$. 所以由 A_x, A_y 的最大性即知 $A_x = A_x \cup A_y = A_y$. 如下定义 A 上的关系 $\sim$:

$$x \sim y \Leftrightarrow A_x = A_y,$$

则 $\sim$ 是 A 上的等价关系. 在每个等价类中取代表元 x,则 $A = \dot{\bigcup}_{x \in A'} A_x$,这里 A' 是如上所取的代表元的集合.

下证唯一性. 设 A 有两种不交并分解:$A = \dot{\bigcup}_{i \in I} B_i = \dot{\bigcup}_{j \in J} C_j$,这里 B_i 和 C_j 都是不可分的. 对任意 $i \in I$,考虑 B_i 中的元素. 取定 $b \in B_i$,则存在 $j \in J$,使得 $b \in C_j$. 所以 $Sb \subseteq C_j$. 令

$$B_i' = \{b \in B_i \mid b \in C_j\},$$

$$B_i'' = \{b \in B_i \mid \text{存在 } k \in J \text{ 使得 } b \in C_k \text{ 但 } k \neq j\}.$$

显然 $B_i = B_i' \dot{\cup} B_i''$ 且 B_i' 和 B_i'' 若不空的话都是 S- 系. 由 B_i 的不可分性即得 $B_i'' = \varnothing$. 所以对任意 $x \in I$,存在 $j \in J$,使得 $B_i \subseteq C_j$. 对于上述 j,同样的方法可知存在 $i' \in I$ 使得 $C_j \subseteq B_{i'}$. 所以 $B_i \subseteq C_j \subseteq B_{i'}$. 易知 $i = i'$. 因此 $B_i = C_j$. 同样的方法可知对任意 $j \in J$,存在 $i \in I$ 使得 $C_j = B_i$. 这即证明了唯一性. //

设 A 是 S- 系,$A = \dot{\bigcup}_{i \in I} B_i$ 是 A 的不可分分解. 我们称每个 B_i 为 A 的不可分分量.

命题 3.6 设 A 是 S- 系,$a, b \in A$,则 a, b 在 A 的同一个不可分分量中当且仅当存在 $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$, $a_1, \cdots, a_{n-1} \in A$,使得

$$s_1 a = t_1 a_1,$$

$$
\begin{aligned}
s_2a_1 &= t_2a_2, \\
s_3a_2 &= t_3a_3, \\
&\cdots\cdots \\
s_na_{n-1} &= t_nb.
\end{aligned} \tag{1}
$$

证明 充分性 设存在 $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n \in S, a_1,\cdots,a_{n-1} \in A$ 满足题设条件. 容易看出 a 和 b 在同一个不可分分量中.

必要性 在 A 上定义关系 $\sim$:

$a \sim b \Leftrightarrow$ 存在 $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n \in S, a_1,\cdots,a_{n-1} \in A$ 使得等式组(1) 成立.

可以证明 $\sim$ 是 A 上的等价关系. 将 A 按照等价关系 $\sim$ 分类,则 A 可以写成这些子类的不交并. 设 A_i 是任意子类, $x \in A_i$. 对任意 $s \in S$, 显然 $x \sim sx$, 即 sx 和 x 在同一个子类中,所以 $sx \in A_i$. 这说明 A_i 是 S- 系. 容易证明 A_i 还是不可分的. 所以 A 写成了不可分子系的不交并,且任意 $a,b \in A$, 若 a,b 在同一个不可分分量中,则 $a \sim b$, 故结论成立. //

推论 3.7 设 A 是 S- 系, $a,b \in A$, 则 a,b 在 A 的同一个不可分分量中当且仅当存在 $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n \in S, a_1,\cdots,a_n \in A$, 使得

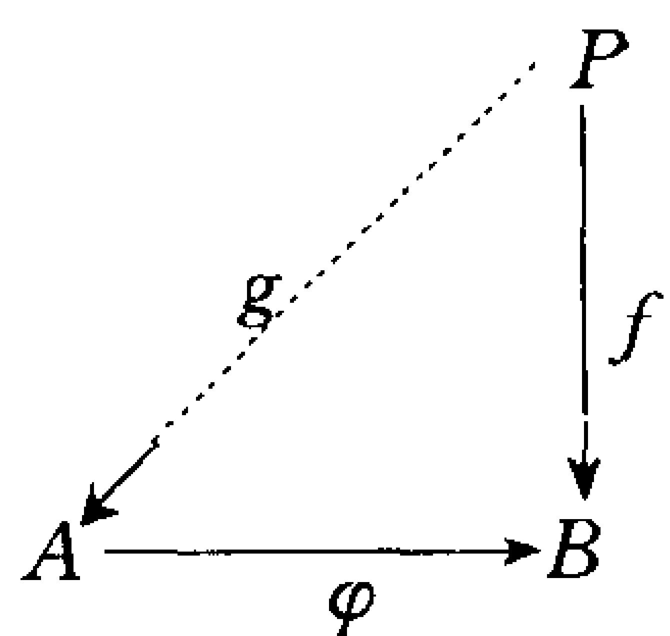
$$
\begin{aligned}
a &= s_1a_1, \\
t_1a_1 &= s_2a_2, \\
&\cdots\cdots \\
t_na_n &= b.
\end{aligned} \tag{2}
$$

证明 若等式组(1) 成立,则在(1) 的前后分别增加等式 $a = 1 \cdot a$ 和 $1 \cdot b = b$ 即可得到形如(2) 的等式组. //

第二章　投射性

§1　投射 S- 系

定义 1.1　S- 系 P 称为投射的，如果对于任意 S- 满同态 $\varphi: A \to B$，任意 S- 同态 $f: P \to B$，存在 S- 同态 $g: P \to A$ 使得下图可换：



若 P 是投射 S- 系，有时我们也说 P 是范畴 S-Act 中的投射对象.

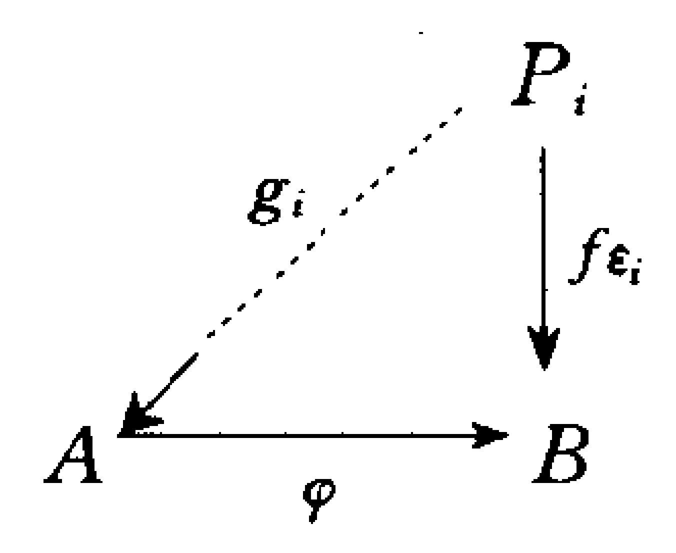
例 1.2　设 S 是幺半群，$e^2 = e \in S$，则 S- 系 Se 是投射的.

证明　设 $\varphi: A \to B$ 是任意 S- 满同态，$f: Se \to B$ 是任意 S- 同态. 记 $f(e) = b \in B$. 因为 φ 是满的，所以存在 $a \in A$ 使得 $\varphi(a) = b$. 定义 S- 同态 $g: Se \to A$, $g(se) = sea$, $\forall\, s \in S$，则对任意 $s \in S$，$\varphi g(se) = \varphi(sea) = se\varphi(a) = seb = sef(e) = f(see) = f(se)$，所以 $\varphi g = f$. 这就证明了 Se 是投射的.　//

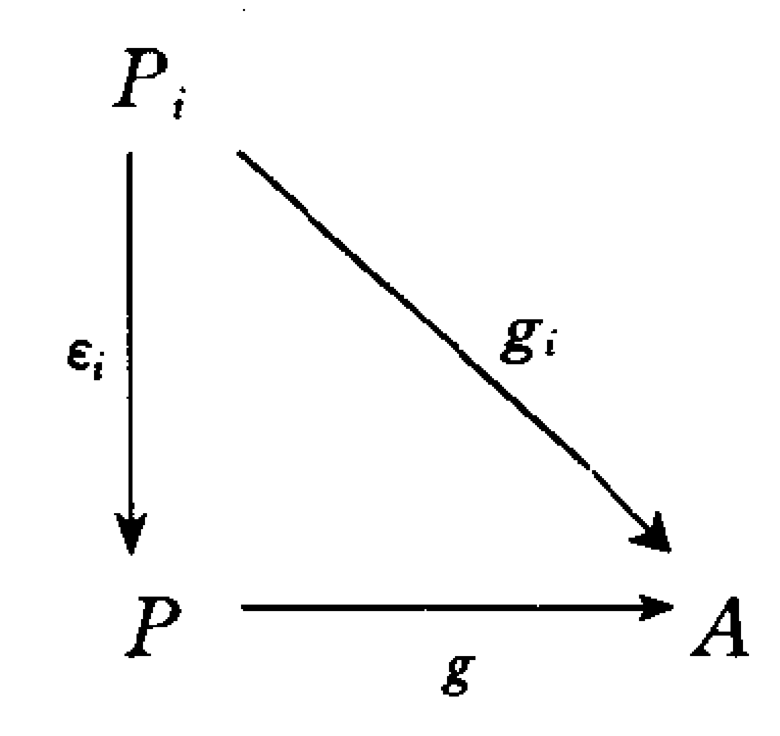
为了给出投射 S- 系的等价刻画，我们需要以下引理.

引理 1.3　任意投射 S- 系的余直积仍为投射系.

证明　设 $P_i (i \in I)$ 是投射 S- 系，$P = \coprod_{i \in I} P_i$，$\varphi: A \to B$ 是 S- 满同态，$f: P \to B$ 是 S- 同态. 记 $\varepsilon_i: P_i \to P$ 是自然的 S- 同态，则由 P_i 的投射性知存在 S- 同态 $g_i: P_i \to A$ 使得下图可换：



由余直积的泛性质知存在 S- 同态 $g:P\to A$ 使得下图可换：



所以对任意 $i\in I$，$f\varepsilon_i=\varphi g_i=\varphi g\varepsilon_i$. 因此 $f=\varphi g$，即 P 是投射的. //

称 S- 满同态 $f:A\to B$ 是可收缩的，如果存在 S- 同态 $g:B\to A$ 使得 $fg=1_B$. 下面的定理给出了投射系的等价刻画.

定理 1.4 对于 S- 系 P，以下三条等价：

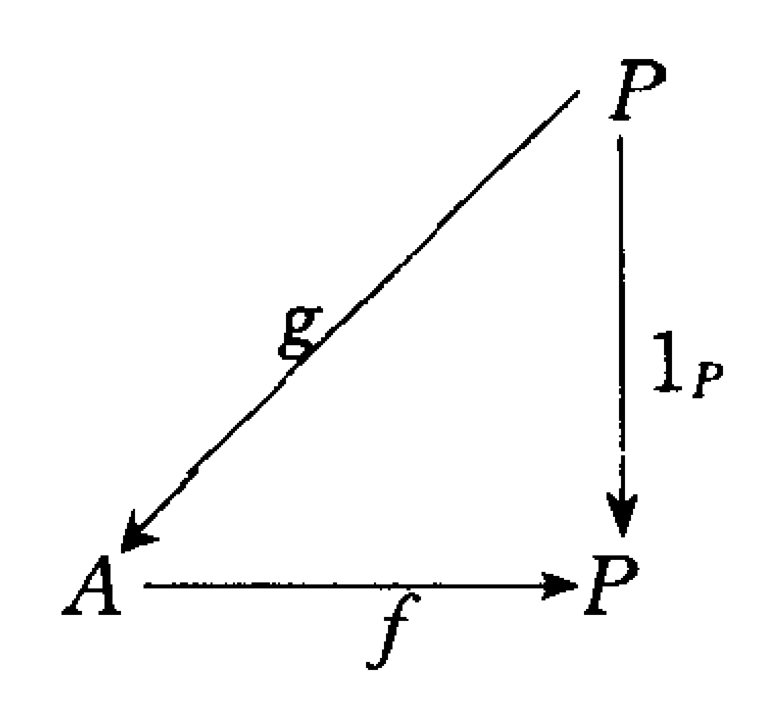
(1) P 是投射的；

(2) 函子 $\mathrm{Hom}_S(P,-)$（从范畴 S-Act 到集合范畴）把满同态变为满映射；

(3) 任意满同态 $A\to P$ 是可收缩的.

证明 (1)⇔(2) 是显然的.

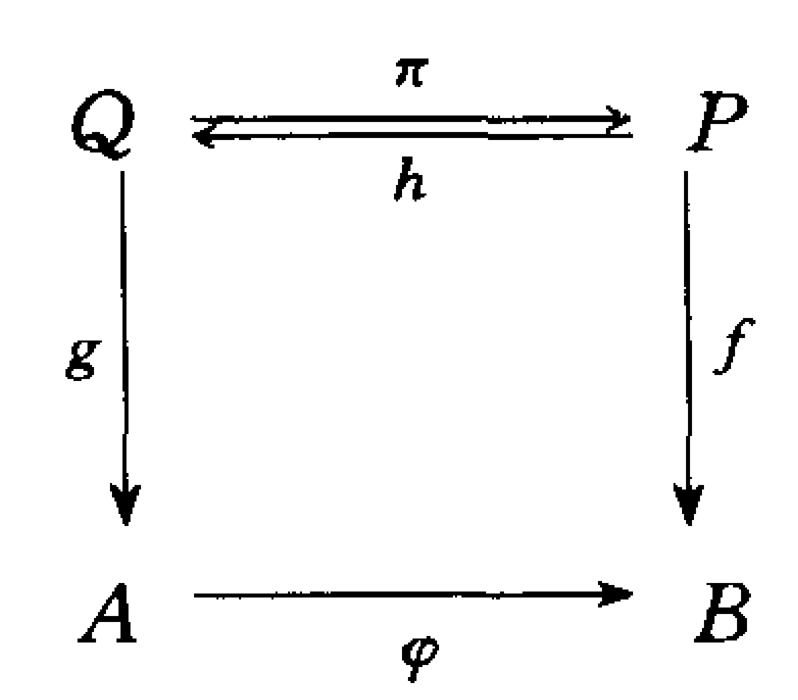
(1)⇒(3) 对任意满同态 $f:A\to P$，由 P 的投射性知存在 S-同态 $g:P\to A$ 使得下图可换：



所以 f 是可收缩的.

(3)⇒(1) 对任意 $x \in P$，令 $S_x = S$. 作 $S_x(x \in P)$ 的余直积 $Q = \coprod_{x \in P} S_x$. 由引理 1.3 和例 1.2 知 Q 是投射 S-系. 对任意 $x \in P$，作 S-同态 $\pi_x : S_x \to P$ 为 $\pi_x(s) = sx, \forall\, s \in S_x$. 由余直积的泛性质即知存在 S-同态 $\pi : Q \to P$ 使得 $\pi|_{S_x} = \pi_x$. 显然 π 还是满同态. 所以由(3)知 π 是可收缩的，即存在 S-同态 $h : P \to Q$ 使得 $\pi h = 1_P$.

设 $\varphi : A \to B$ 是 S-满同态，$f : P \to B$ 是 S-同态. 由 Q 的投射性即知存在 S-同态 $g : Q \to A$ 使得下图可换：



即 $\varphi g = f\pi$. 所以 $f = f\pi h = \varphi g h$. 这就证明了 P 是投射系. //

下面的定理说明引理 1.3 的逆也成立.

定理 1.5 设 $P_i (i \in I)$ 是 S-系，则 $\coprod_{i \in I} P_i$ 为投射系当且仅当每个 P_i 为投射系.

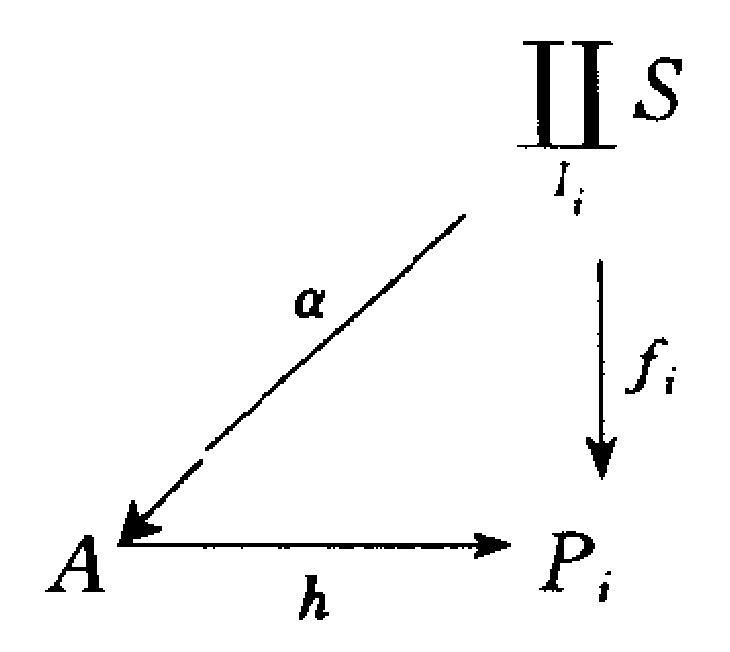
证明 若每个 P_i 为投射系，则由引理 1.3 知 $\coprod_{i \in I} P_i$ 为投射系.

反过来，设 $P = \coprod_{i \in I} P_i$ 是投射系. 记 $\varepsilon_i : P_i \to P$ 为自然的包含同态(实际上，$P = \dot{\bigcup}_{i \in I} P_i$). 对于每个 P_i，类似于定理 1.4 的证明中的(3)⇒(1)，即知存在集合 I_i 以及 S-满同态 $f_i : \coprod_{j \in I_i} S \to P_i$. 作余直积 $T = \coprod_{i \in I} \left(\coprod_{j \in I_i} S \right)$，记 $\sigma_i : \coprod_{j \in I_i} S \to T$ 为自然的包含同态. 由余直积的泛性质即知存在 S-同态 $f : T \to P$，使得对任意 $i \in I$ 有 $f\sigma_i = \varepsilon_i f_i$. 由于每个 f_i 是满同态，所以易证 f 也是满同态. 利用 P 的投射性，由定理 1.4 知 $f : T \to P$ 是可收缩的. 所以存在 S-同态 $g : P \to T$ 使得 $fg = 1_P$. 我们下面证明 $g\varepsilon_i(P_i) \subseteq \coprod_{j \in I_i} S$.

若存在 $x \in P_i$，使得 $g\varepsilon_i(x) \in \coprod_{j \in I_k} S$，$k \neq i$，则有 $x = \varepsilon_i(x) = fg\varepsilon_i(x) \in f(\coprod_{I_k} S) = f\sigma_k(\coprod_{I_k} S) = \varepsilon_k f_k(\coprod_{I_k} S) \subseteq P_k$，矛盾. 这就证明了 $g\varepsilon_i(P_i) \subseteq \coprod_{I_i} S$.

因此对于任意 $x \in P_i$，$fg\varepsilon_i(x) = f(g\varepsilon_i(x)) = f\sigma_i(g\varepsilon_i(x)) = \varepsilon_i f_i g\varepsilon_i(x)$，即 $\varepsilon_i(x) = \varepsilon_i f_i g\varepsilon_i(x)$. 由于 ε_i 是单同态，我们有 $x = f_i g\varepsilon_i(x)$. 所以 $f_i g\varepsilon_i = 1_{P_i}$.

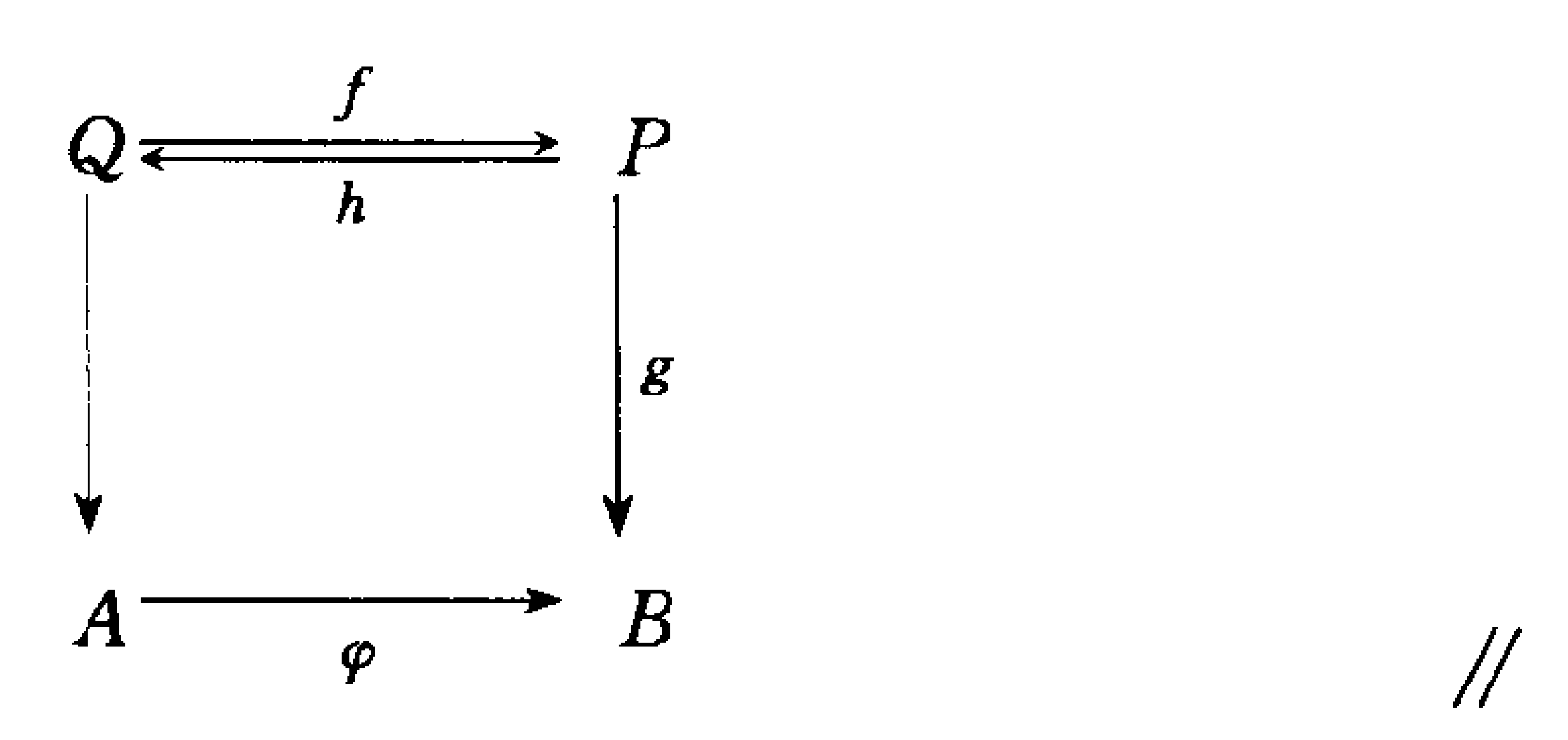
设 $h: A \to P_i$ 是 S- 满同态. 由例 1.2 和引理 1.3 知 $\coprod_{I_i} S$ 是投射系. 所以存在 S- 同态 $\alpha: \coprod_{I_i} S \to A$ 使得下图可换：



即 $h\alpha = f_i$. 所以 $h\alpha g\varepsilon_i = f_i g\varepsilon_i = 1_{P_i}$. 因此 S- 满同态 $h: A \to P_i$ 是可收缩的. 由定理 1.4 即知 P_i 是投射的. //

命题 1.6 设 S- 满同态 $f: Q \to P$ 是可收缩的. 如果 Q 是投射系，那么 P 也是投射系.

证明 对于任意 S- 满同态 $\varphi: A \to B$ 和 S- 同态 $g: P \to B$ 由以下的交换图即得结论：



//

由第一章我们已经知道，循环系是不可分的，不可分系未必是循环的. 但对于投射系我们有

命题1.7 设P是投射S-系,则P是不可分的当且仅当它是循环的.

证明 和定理1.4的证明类似地可知存在S-满同态$f:\coprod_{i\in I}S_i\to P$,这里每个$S_i$同构于${}_SS$. 由于$P$是投射的,所以$f$是可收缩的,即存在$S$-同态$g:P\to\coprod_{i\in I}S_i$使得$fg=1_P$. 显然存在$i\in I$,使得$g(P)\cap S_i\neq\varnothing$. 令

$$A_1=\{x\in P\,|\,g(x)\in S_i\},\quad A_2=P-A_1.$$

若$A_2\neq\varnothing$,则A_1,A_2都是S-系且$P=A_1\dot{\cup}A_2$. 这和P的不可分性矛盾. 所以$A_2=\varnothing$,即$g(P)\subseteq S_i$. 因此$P=fg(P)\subseteq f(S_i)$. 而$f(S_i)\subseteq P$是显然的. 所以$P=f(S_i)$,故P是循环的. //

命题1.8 循环S-系Sx是投射的当且仅当存在S的幂等元e使得$Sx\simeq Se$.

证明 由例1.2知对于任意幂等元$e\in S$,Se是投射S-系.

反过来,设Sx是投射系. 定义S-同态$f:S\to Sx$为$f(s)=sx$,$\forall s\in S$,则f是可收缩的,所以存在S-同态$g:Sx\to S$使得$fg=1_{Sx}$. 设$g(x)=e\in S$,则

$$x=fg(x)=f(e)=ef(1)=ex,$$

所以

$$e=g(x)=g(ex)=eg(x)=ee=e^2,$$

即e是幂等元. 显然$g(Sx)=Se$. 所以$Sx\simeq Se$. //

下面的定理给出了投射S-系的结构.

定理1.9 S-系P是投射的当且仅当存在S的幂等元$e_i(i\in I)$使得$P\simeq\coprod_{i\in I}Se_i$.

证明 由例1.2和引理1.3即知$\coprod_{i\in I}Se_i$是投射S-系. 反过来,设P是投射的. 由定理1.3.5知P有不可分分解$P=\dot{\bigcup}_{i\in I}P_i=\coprod_{i\in I}P_i$,其中每个$P_i$是不可分系. 由定理1.5知每个$P_i$也是投射的. 所以由命题1.7即知$P_i$是循环的. 由命题1.8知存在幂等元

$e_i \in S$ 使得 $P_i \simeq Se_i$. 所以 $P \simeq \coprod_{i \in I} Se_i$. //

最后我们再给出一个定义.

定义 1.10 S- 系 A 称为是自由的,如果 $A \simeq \coprod_I {}_S S$.

显然自由系是投射的,但投射系不一定是自由的. 例如若 S 中有零元且 $|S| \geqslant 2$,则 $S0$ 是投射系但不是自由系.

设 A 是自由系,则有 S- 同构 $f: A \simeq \coprod_{i \in I} S_i$. 我们把 $\{f^{-1}(1_i) \mid 1_i$ 是 S_i 的单位元, $i \in I\}$ 叫做 A 的自由基. 显然 $A = \coprod_{i \in I} Sf^{-1}(1_i)$,且 $Sf^{-1}(1_i) \simeq S$.

由定理 1.4 的证明即知有

命题 1.11 任意 S- 系 A 都是自由系的同态象,即存在自由系 F 以及 F 上的同余 λ 使得 $A \simeq F/\lambda$.

§2 完全左投射幺半群

定义 2.1 称 S 为完全左投射幺半群,如果所有(左)S- 系是投射的.

定理 2.2 S 是完全左投射幺半群当且仅当 $S = \{1\}$.

证明 设 $S = \{1\}$, P 是任意 S- 系, $f: A \to P$ 是任意 S- 满同态. 如下定义映射 $g: P \to A$: 任意 $x \in P$,取 $a \in A$ 使得 $f(a) = x$,规定 $g(x) = a$. 因为 $S = \{1\}$,所以 g 是 S- 同态. 又 $fg = 1_P$,所以 f 是可收缩的. 由定理 1.4 即知 P 是投射系. 所以 S 是完全左投射幺半群.

反过来,设 S 是完全左投射幺半群, L 是 S 的真左理想. 考虑第一章 §2 中构造的 S- 系 $A(L)$. 因为 $A(L)$ 是投射的,又是不可分的,所以由命题 1.7 知 $A(L)$ 是循环的. 这和 $A(L)$ 的构造矛盾. 所以 S 没有真的左理想,即 S 是群.

考虑一元 S- 系 $M = \{\theta\}$. 显然有 S- 满同态 $f: S \to M, f(s) =$

$\theta,\forall\ s\in S$. 因为M是投射的，所以f是可收缩的，即存在S-同态g: $M\to S$ 使得 $fg=1_M$. 令 $g(\theta)=a\in S$，则对任意 $s\in S$，

$$sa=sg(\theta)=g(s\theta)=g(\theta)=a.$$

所以 a 是 S 的右零元. 但 S 又是群，所以 $S=\{1\}$. //

下面考虑所有循环系是投射系的幺半群. 为此先证明

引理 2.3 设λ是 S 上的左同余，则循环 S-系 S/λ 是投射的当且仅当存在 $t\in S$ 使得 $t\lambda 1$，且对任意 $x,y\in S$，$x\lambda y\Rightarrow xt=yt$.

证明 设S/λ是投射系，则S-满同态$\sigma:S\to S/\lambda$是可收缩的，所以存在 S-同态 $g:S/\lambda\to S$ 使得 $\sigma g=1$. 设 $g([1])=t$，这里[1]表示 1 所在的类，下同. 因为$[1]=\sigma g([1])=\sigma(t)=[t]$，所以 $t\lambda 1$. 设 $x,y\in S$ 使得 $x\lambda y$，则$[x]=[y]$，所以 $xt=xg([1])=g([x])=g([y])=yg([1])=yt$.

反过来，设满足条件的 t 存在. 定义映射 $f:S/\lambda\to S$ 为 $f([s])=st,\forall\ s\in S$. 若$[x]=[y]$，则$x\lambda y$，所以 $xt=yt$. 这说明 f 的定义是可行的. 显然 f 是 S-同态. 记 $\sigma:S\to S/\lambda$ 是自然的 S-满同态，则

$$\begin{aligned}\sigma f([x])&=\sigma(xt)=x\sigma(t)=x[t]\\&=x[1]=[x],\qquad \forall\ x\in S.\end{aligned}$$

所以 $\sigma f=1$，即 σ 是可收缩的. 由命题 1.6 即知 S/λ是投射的. //

定理 2.4 设幺半群S含有 $0(\neq 1)$，则所有循环的中心S-系是投射的当且仅当 $S=\{1,0\}$.

证明 设 $S=\{1,0\}$，λ是S 上的左同余. 如果$(1,0)\notin\lambda$，则 $S/\lambda\simeq S$ 是投射的. 所以下设$(1,0)\in\lambda$. 在引理 2.3 中令 $t=0$，立即可知 S/λ是投射的.

反过来，设所有循环的中心 S-系是投射的. 假定 L 是 S 的左理想，则中心S-系 S/λ_L 是投射的. 所以由引理 2.3 即知存在$t\in S$ 使得 $t\lambda_L 1$，且对任意 $x,y\in S$，$x\lambda_L y\Rightarrow xt=yt$. 若$1\in L$，则 $L=S$. 若 $1\notin L$，则 $t=1$. 因此若 $x,y\in L$，则 $x=y$. 这说明$|L|=1$，故 $L=\{0\}$. 因此 S 除了$\{0\}$ 以外再没有真左理想.

设 $0\neq a\in S$，则$Sa\neq\{0\}$，所以$Sa=S$. 因此a是左可逆元.

容易证明 $S-\{0\}$ 是群.

令 $G=S-\{0\}$. 设 $M=\{x,\theta\}$,规定 S 在 M 上的左作用为

$$gx=x,0x=\theta,g\theta=\theta=0\theta,\quad \forall\, g\in G,$$

则 M 是中心 S- 系,且 $M=Sx$,所以 M 是循环的. 从而 M 是投射 S- 系. 如下定义 S- 同态 $\pi:S\to M$,

$$\pi(g)=x,\pi(0)=\theta,\quad \forall\, g\in G.$$

显然 π 是 S- 满同态. 所以 π 是可收缩的,即存在 S- 同态 $f:M\to S$ 使得 $\pi f=1_M$. 设 $f(x)=s\in S$. 若 $s\in G$,则对任意 $g\in G$,

$$gs=gf(x)=f(gx)=f(x)=s.$$

因为 G 是群,所以 $g=1$. 因此 $|G|=1$,从而 $S=\{1,0\}$. 若 $s\notin G$,则 $s=0$. 所以 $x=\pi f(x)=\pi(s)=\pi(0)=\theta$,矛盾. //

定理 2.5 对于幺半群 S,以下两条等价:

(1) 所有循环 S- 系是投射的;

(2) $S=\{1\}$ 或 $S=\{1,0\}$.

证明 (1)⇒(2) 设 $S\neq\{1\}$. 考虑一元 S- 系 $M=\{\theta\}$. 显然有 S- 满同态 $f:S\to M$. 由 M 的投射性知 f 是可收缩的,所以存在 S- 同态 $g:M\to S$ 使得 $fg=1_M$. 记 $g(\theta)=a\in S$,则对任意 $s\in S$,$sa=sg(\theta)=g(s\theta)=g(\theta)=a$,即 a 是 S 的右零元.

设 N 为 S 的所有右零元的集合,则 N 是 S 的左理想. 由条件即知 Rees 商 S/λ_N 是投射的. 所以由引理 2.3 知存在 $t\in S$ 使得 $t\lambda_N 1$,且任意 $x,y\in S$,$x\lambda_N y\Rightarrow xt=yt$. 若 $1\in N$,则 $S=\{1\}$,矛盾. 所以 $1\notin N$. 因此 $t=1$. 若 $x,y\in N$,则 $x\lambda_N y$,所以 $x=y$. 这说明 $|N|=1$,即 S 有唯一的右零元 θ. 对任意 $s,t\in S$,因为 $t(\theta s)=(t\theta)s=\theta s$,所以 θs 也是右零元,从而 $\theta s=\theta$. 这说明 θ 是 S 的零元.

这样我们就证明了如果 $S\neq\{1\}$,那么 S 中含有零元 $\theta\neq 1$. 所以由定理 2.4 即知 $S=\{1,0\}$.

(2)⇒(1) 由定理 2.2 和定理 2.4 的证明即得结论. //

§3 拟投射系

本节中我们假定幺半群 S 含有零元 $0 \neq 1$,且考虑的 S- 系均为 S^0-Act 中的对象,即均为中心 S- 系.

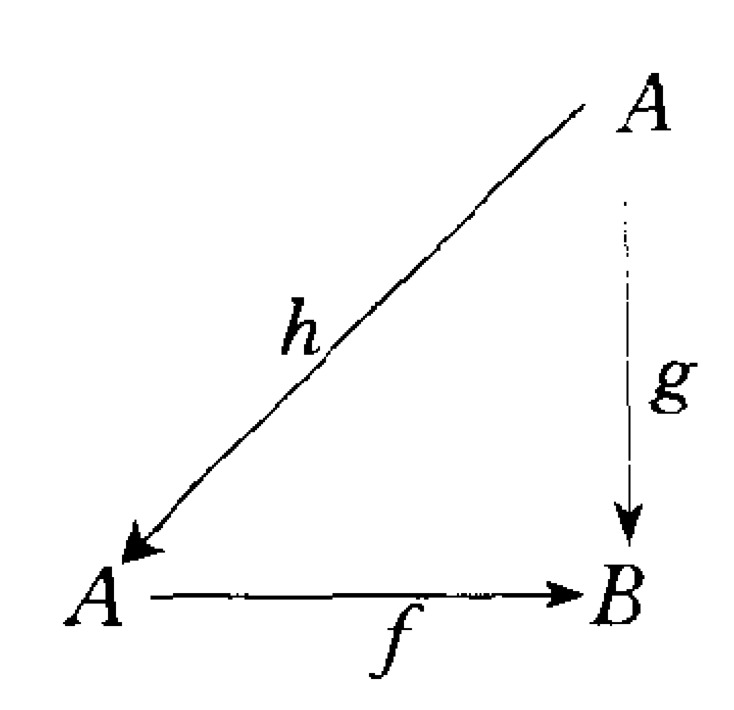
和 §1 中投射 S- 系的定义类似地可在 S^0-Act 中定义投射对象.本节中所说的投射 S- 系均指范畴 S^0-Act 中的投射对象.

考察引理 2.3 和定理 2.4 的证明,有

命题 3.1 所有循环的中心 S- 系是投射的当且仅当 $S = \{1, 0\}$.

下面给出拟投射 S- 系的概念.

定义 3.2 设 $A \in S^0$-Act. 称 A 是拟投射的,如果对任意 S- 满同态 $f: A \to B$ 和任意 S- 同态 $g: A \to B$,存在 S- 同态 $h: A \to A$ 使得下图可换:



根据我们的约定,上述定义中的 A,B 均在 S^0-Act 中.

显然投射 S- 系是拟投射的,反之则不然.例如,设 S 是交换幺半群且 $|S| \geqslant 3$,则由命题 3.1 知存在循环 S- 系 A,A 不是投射的.但由下面的命题,A 是拟投射的.

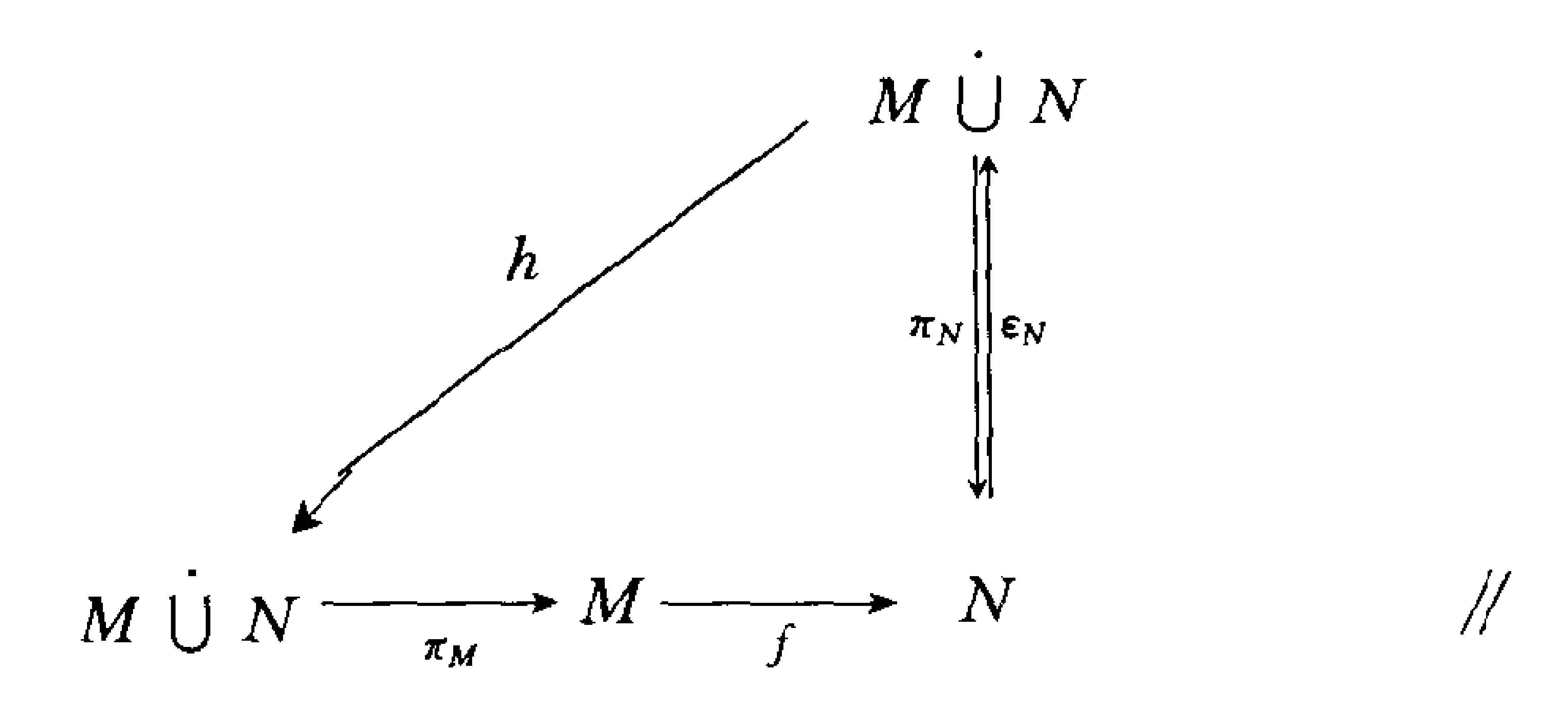
命题 3.3 设 S 是交换幺半群,则任意循环 S- 系是拟投射的.

证明 设 $A = Sx$,$f: A \to B$ 是 S- 满同态,$g: A \to B$ 是 S- 同态. 记 $g(x) = b \in B$. 由于 f 是满同态,所以存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$. 定义 $h: A \to A$ 为 $h(sx) = sa$,$\forall s \in S$. 设 $a = s_0x$. 若 $sx = tx$,$s, t \in S$,则 $s_0sx = s_0tx$,所以 $ss_0x = ts_0x$,即 $sa = ta$. 这说明 h 的定

义是可行的. 显然 h 是 S- 同态. 又 $fh(sx)=f(sa)=sf(a)=sb=sg(x)=g(sx)$, 所以 $fh=g$. 因此 A 是拟投射的. //

引理 3.4 设 $f:M\to N$ 是 S- 满同态. 若 $M\dot{\cup}N$ 是拟投射的, 则 f 是可收缩的.

证明 由下图即得结论.



//

定理 3.5 对于幺半群 S, 以下三条等价:

(1) 所有 S- 系都是拟投射的;

(2) 所有 S- 系都是投射的;

(3) $S=\{1,0\}$.

证明 (1)⇒(2) 设 A 是任意 S- 系. 由命题 1.11 知存在自由 S- 系 F 以及 S- 满同态 $f:F\to A$. 由(1) 知 $F\coprod A$ 是拟投射的, 所以由引理 3.4 知 f 是可收缩的. 因此 A 是投射的.

(2)⇒(3) 由命题 3.1 即得.

(3)⇒(1) 设 A 是任意 S- 系, $f:A\to B$ 是任意 S- 满同态, $g:A\to B$ 是任意 S- 同态. 对任意 $0\neq a\in A$, $g(a)\in B$, 所以存在 $b\in A$ 使得 $f(b)=g(a)$. 定义 $h:A\to A$ 为 $h(a)=b$(满足 $f(b)=g(a)$ 的 b 不唯一, 但我们任意取定一个). 若 $a=0\in A$, 则规定 $h(0)=0$. 容易证明 h 是 S- 同态且 $fh=g$. 所以 A 是拟投射的. //

定理 3.6 设 S 是交换幺半群, 则以下几条等价:

(1) 任意拟投射系是投射的;

(2) 任意拟投射系的余直积是投射的;

(3) 任意拟投射系的余直积是拟投射的;

(4) $S=\{1,0\}$.

证明 (1)⇒(4) 由命题 3.3 知任意循环 S- 系都是拟投射的，所以由(1) 知所有循环 S- 系都是投射的. 由命题 3.1 即得 $S=\{0,1\}$.

(4)⇒(3) 由定理 3.5 即得.

(3)⇒(2) 设 $\{P_i \mid i\in I\}$ 是一簇拟投射 S- 系，$P=\coprod_{i\in I}P_i$. 由命题 1.11 知存在自由 S- 系 F 以及 S- 满同态 $f:F\to P$. 显然 $P\coprod F=\coprod_{i\in I}P_i\coprod F$ 仍是拟投射 S- 系的余直积，所以由(3) 知 $P\coprod F$ 是拟投射的. 再由引理 3.4 知 f 是可收缩的，所以 P 是投射的.

(2)⇒(1) 设 A 是拟投射 S- 系. 由命题 1.11 知存在自由 S- 系 F 及 S- 满同态 $f:F\to A$. 由(2) 知 $A\coprod F$ 是投射的，所以由引理 3.4 知 f 是可收缩的，从而 A 是投射的. //

由定理 3.5 知当 $S=\{0,1\}$ 时，S^0-Act 中的所有对象都是投射对象. 由定理 2.2 知此时 S-Act 中有非投射的对象. 下面的例子说明当 $S=\{0,1\}$ 时，S^0-Act 中存在对象 M，使得 M 是 S^0-Act 中的投射对象，但 M 不是 S-Act 中的投射对象.

例 3.7 设 $S=\{1,0\}$，$M=\{\theta,a,b\}$. 对任意 $x\in M$，规定 $1x=x$，$0x=\theta$，则 M 是 S- 系，θ 为其零元. 由定理 3.5 知 M 是 S^0-Act 中的投射对象. 假定 M 也是 S-Act 中的投射对象.

令 $S_1=S$，$S_2=S$，在 S-Act 中作 S_1 和 S_2 的余直积 $S_1\dot{\cup}S_2$，如下定义映射 $f:S_1\dot{\cup}S_2\to M$：

$$f(1_1)=a,f(1_2)=b,f(0_1)=f(0_2)=\theta,$$

则 f 是 S- 满同态. 所以 f 是可收缩的，即存在 S- 同态 $g:M\to S_1\dot{\cup}S_2$ 使得 $fg=1_M$. 因为 $0a=0b$，所以 $0g(a)=0g(b)$. 不妨设 $0g(a)=0g(b)\in S_1$，则 $g(a),g(b)\in S_1$. 所以 $b=fg(b)=f(g(b))=f(g(b)1_1)=g(b)f(1_1)=g(b)a\in\{\theta,a\}$，矛盾. 因此 M 不是 S-Act 中的投射对象. 事实上，$S_1\dot{\cup}S_2\notin S^0$-Act. 在 S^0-Act 中 S_1 和

S_2 的余直积应该是它们的零直并. //

§4 投射系的直积

由 §1 知任意一簇投射 S- 系的余直积仍是投射系. 本节讨论投射系的直积，主要结果选自 Bulman-Fleming 的文章[11]. 首先我们有

命题 4.1 对任意集合 I，以下两条等价：

(1) $S^I = \prod\limits_I S$ 是投射的；

(2) 若 $A_i(i \in I)$ 是投射 S- 系，则 $\prod\limits_{i\in I} A_i$ 仍为投射系.

证明 (2)⇒(1) 是显然的. 我们只需证明(1)⇒(2). 设 S^I，$A_i(i \in I)$ 都是投射 S- 系. 对任意 $i \in I$，由定理 1.9 知存在集合 J_i 及幂等元 $e_{ij} \in S(j \in J_i)$ 使得 $A_i \simeq \coprod\limits_{j\in J_i} Se_{ij}$. 因此

$$\prod_{i\in I} A_i \simeq \prod_{i\in I}\ \coprod_{j\in J_i} Se_{ij} = \coprod_{\varphi\in J}\Big(\prod_{i\in I} Se_{i\varphi(i)}\Big),$$

这里 $J = \bigcup\limits_{i\in I} J_i$. 因为 S- 满同态 $f_i: S \to Se_{i\varphi(i)}$ 是可收缩的，所以诱导同态 $f: S^I \to \prod\limits_{i\in I} Se_{i\varphi(i)}$ 也是收缩的，因此对任意 $\varphi \in J$，$\prod\limits_{i\in I} Se_{i\varphi(i)}$ 是投射的，从而由定理 1.5 知 $\prod\limits_{i\in I} A_i$ 是投射的. //

命题 4.2 对任意集合 I，以下两条等价：

(1) S^I 是自由的；

(2) 若 $A_i(i \in I)$ 是自由 S- 系，则 $\prod\limits_{i\in I} A_i$ 仍为自由系.

证明 由自由系的定义即知任意一簇自由系的余直积仍为自由系，所以类似于命题 4.1 的证明即可完成该命题的证明. //

设 $s,t \in S$，我们称 s 是 t 的因子，如果 $t \in sS$，记为 $s|t$. 显然 $s\mathscr{R}t \Leftrightarrow s|t$ 且 $t|s$. 设 X 是 S 的非空子集合. 元素 $d \in S$ 称为 X 的公因子，如果对任意 $x \in X$，d 是 x 的因子. d 称为 X 的最大公因子，

如果d是X的公因子，且X的任意公因子都是d的因子. 最大公因子不一定存在. 若存在，则任意两个最大公因子具有 $\mathscr{R}$- 关系.

设 $a = (a_i)_{i\in I} \in S^I$. 若集合$\{a_i | i \in I\}$ 的最大公因子存在，我们任意取定一个，记为 $g(a)$. 若 d 是$\{a_i | i \in I\}$ 的另外的最大公因子，则 $d\mathscr{R}g(a)$. 设 $a_i = g(a)a_i'$, $i \in I$. 令 $a' = (a_i')_{i\in I} \in S^I$，则 $a = g(a)a'$. 显然，如果S是左可消幺半群，则对于任意 $a \in S^I$ 和如上取定的 $g(a)$，满足 $a = g(a)a'$ 的 $a' \in S^I$ 是唯一的.

引理 4.3 设S是左可消幺半群且S的任意非空子集合都有最大公因子，继续使用上述记号，则$\{a_i' | i \in I\}$ 的最大公因子一定是S中的可逆元.

证明 设 h 是$\{a_i' | i \in I\}$ 的一个最大公因子，则 $g(a)h$ 是$\{a_i | i \in I\}$ 的最大公因子. 所以 $g(a)\mathscr{R}g(a)h$. 因为S是左可消幺半群，所以存在S的可逆元u使得 $g(a)h = g(a)u$. 因此$h = u$. //

引理 4.4 在引理 4.3 的条件和记号之下，对任意 $s \in S$，有 $g(sa)\mathscr{R}sg(a)$.

证明 因为 $sa = (sa_i)_{i\in I}$，所以 $sg(a)$ 是$\{sa_i | i \in I\}$ 的公因子. 因为 $g(sa)$ 是$\{sa_i | i \in I\}$ 的最大公因子，所以存在$h \in S$，使得 $g(sa) = sg(a)h$. 设 $sa = g(sa)a''$，则 $sa = sg(a)ha''$. 又 $sa = sg(a)a'$，所以 $a' = ha''$. 因此h是$\{a_i' | i \in I\}$ 的公因子. 由引理 4.3 即知 h 是S中的可逆元. 所以 $g(sa)\mathscr{R}sg(a)$. //

命题 4.5 在引理 4.3 的条件和记号之下，S^I 的包含元素 $a = g(a)a'$ 的不可分分量为 Sa'.

证明 设$b \in S^I$，b和a在同一个不可分分量中. 由推论 1.3.7 知存在 $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$，$b_1, \cdots, b_n \in S^I$ 使得

$$b = s_1b_1,$$
$$t_1b_1 = s_2b_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$t_nb_n = a.$$

再设$b = g(b)b'$. 我们下面对n用数学归纳法证明存在S的可逆元u 使得 $b' = ua'$. 于是 $b = g(b)ua' \in Sa'$.

设 $n=1$，则 $b=s_1b_1, t_1b_1=a$. 由引理 4.4 知存在可逆元 $u,v \in S$ 使得

$$g(b)=g(s_1b_1)=s_1g(b_1)u,$$
$$g(a)=g(t_1b_1)=t_1g(b_1)v.$$

设 $b_1=g(b_1)b_1'$，则 $g(b)b'=b=s_1b_1=s_1g(b_1)b_1'=g(b)u^{-1}b_1'$，所以 $b'=u^{-1}b_1'$. 同理 $g(a)a'=a=t_1b_1=t_1g(b_1)b_1'=g(a)v^{-1}b_1'$，所以 $a'=v^{-1}b_1'$. 因此 $b'=u^{-1}va'$.

设 $n>1$. 和前面证明类似地有 $b_1'=ub'$. 对于 $t_1b_1 \in S^I$，设 $t_1b_1=g(t_1b_1)(t_1b_1)'$. 由归纳假定知存在 S 的可逆元 x 使得 $(t_1b_1)'=xa'$. 所以

$$t_1g(b_1)b_1'=t_1b_1=g(t_1b_1)(t_1b_1)'=t_1g(b_1)yxa',$$

这里 $y \in S$ 是可逆元. 因此 $b_1'=yxa'$. 由此即得 $b'=u^{-1}b_1'=u^{-1}yxa'$. //

设 $a=(a_i)_{i\in I} \in S^I$. 定义如下记号：

$$R(a)=\{b=(b_i)_{i\in I} \in S^I \mid a_ib_i=a_jb_j, \forall\, i,j \in I\},$$
$$r(a)=\{s \in S \mid a_is=a_js, \forall\, i,j \in I\}.$$

对任意 $x,y \in S$，定义

$$r(x,y)=\{s \in S \mid xs=ys\}.$$

定理 4.6 对幺半群 S，以下几条等价：

(1) 任意投射 S- 系的直积仍为投射系；

(2) 对任意非空集合 I，S^I 是投射系；

(3) 对任意非空集合 I 和任意 $a=(a_i)_{i\in I} \in S^I$，$R(a)$ 和 $r(a)$ 或为空集，或为循环右 S- 系；

(4) S 是左可消的，S 的任意主右理想的交若非空的话，则仍是主右理想，且对任意 $x,y \in S$，$r(x,y)$ 或为空集，或为 S 的主右理想；

(5) S 是左可消的，S 的任意非空子集合有最大公因子，对任意 $x,y \in S$，$r(x,y)$ 或为空集，或为 S 的主右理想.

证明 (1)$\Leftrightarrow$(2) 这是命题 4.1.

(2)$\Rightarrow$(3) 设 $a=(a_i)_{i\in I} \in S^I$. 假定 $R(a) \neq \varnothing$；则 $R(a)$ 是

右 S-系 S^I 的子系. 设 $R(a)=\{b^j \mid j\in J\}$,这里 $b^j=(b_i^j)_{i\in I}\in S^I$, $\forall\ j\in J$. 考虑 $(b_i^j)_{j\in J}$,$(b_k^j)_{j\in J}\in S^J$. 显然有

$$(b_i^j)_{j\in J}=1\cdot(b_i^j)_{j\in J},$$

$$a_i(b_i^j)_{j\in J}=a_k(b_k^j)_{j\in J},$$

$$1\cdot(b_k^j)_{j\in J}=(b_k^j)_{j\in J},$$

所以 $(b_i^j)_{j\in J}$ 和 $(b_k^j)_{j\in J}$ 在 S^J 的同一个不可分分量中. 因为 S^J 是投射 S-系,所以由命题1.8知 S^J 的每个不可分分量具有形式 Sc,其中 $c\in S^J$ 满足如下条件:存在幂等元 $e\in S$ 使得 $ec=c$ 且对任意 $x,y\in S$,$xc=yc\Rightarrow xe=ye$. 所以可设 $(b_i^j)_{j\in J}=u_ic\in Sc$,$\forall\ i\in I$. 对任意 $i,k\in I$,因为

$$a_iu_ic=a_i(b_i^j)_{j\in J}=a_k(b_k^j)_{j\in J}=a_ku_kc,$$

所以由 c 的性质即知有

$$a_iu_ie=a_ku_ke,\quad \forall\ i,k\in I.$$

这说明 S^I 中的元素 $(u_ie)_{i\in I}\in R(a)$,所以 $(u_ie)_{i\in I}S\subseteq R(a)$.

设 $b^j\in R(a)$,则 $b^j=(b_i^j)_{i\in I}=(u_ic_j)_{i\in I}$,这里 $c=(c_j)_{j\in J}\in S^J$. 由 c 的性质即得 $b^j=(u_iec_j)_{i\in I}=(u_ie)_{i\in I}c_j\in(u_ie)_{i\in I}S$. 所以 $R(a)=(u_ie)_{i\in I}S$ 是循环的.

下设 $r(a)\neq\varnothing$,则 $r(a)$ 是 S 的右理想. 设 $r(a)=\{s^j \mid j\in J\}$,考虑 S^J 中的元素 $(s^j)_{j\in J}$. 因为 S^J 是投射的,所以存在 $c=(c_j)_{j\in J}\in S^J$ 和幂等元 $e\in S$ 使得 $ec=c$ 且对任意 $x,y\in S$,$xc=yc\Rightarrow xe=ye$,而 $(s^j)_{j\in J}\in Sc$. 设 $(s^j)_{j\in J}=uc$,则对任意 $i,k\in I$,$a_iuc=a_i(s^j)_{j\in J}=a_k(s^j)_{j\in J}=a_kuc$,所以 $a_iue=a_kue$. 因此 $ue\in r(a)$. 设 $s\in r(a)$,则 $s=s^j$. 因此 $s=uc_j=uec_j\in ueS$. 所以 $r(a)=ueS$ 是 S 的循环右理想.

(3)⇒(4) 设 $x,s,t\in S$ 满足 $xs=xt$ 且 $s\neq t$. 取集合 $I=S$,设 $a=(x)_{i\in I}\in S^I$,令 $A=\{s,t\}^S=\coprod_S\{s,t\}$,则 A 中的任意元素都在 $R(a)$ 中,所以 $|R(a)|\geqslant 2^{|S|}>|S|$. 因此 $R(a)$ 不是循环系,矛盾. 矛盾说明当 $xs=xt$ 时,$s=t$. 即 S 是左可消的.

设 $a_i(i\in I)\in S$ 使得 $\bigcap_{i\in I}a_iS\neq\varnothing$. 对任意 $x\in\bigcap_{i\in I}a_iS$ 和任意 i,

$j \in I$，存在 $b_i, b_j \in S$ 使得 $x = a_i b_i = a_j b_j$. 令 $a = (a_i)_{i \in I}, b = (b_i)_{i \in I}$，则 $b \in R(a)$，所以存在 $u = (u_i)_{i \in I} \in S^I$，使得 $R(a) = (u_i)_{i \in I} S$. 因此 $b = us, s \in S$. 故 $x = a_i b_i = a_i u_i s$. 令 $t = a_i u_i = a_j u_j$，$\forall\, i, j \in I$，则 $\bigcap_{i \in I} a_i S = tS$.

设 $x, y \in S$ 使得 $r(x,y) \neq \varnothing$. 设 I 是任意集合. 对任意 $i \in I$，令 $a_i \in \{x, y\}$ 且所有 a_i 不能全是 x 或全是 y. 令 $a = (a_i)_{i \in I}$，则 $r(a) \neq \varnothing$. 由(3)知存在 $s \in S$，使得 $r(a) = sS$. 显然 $s \in r(x,y)$. 又对任意 $t \in r(x,y)$，$t \in r(a)$，所以 $t \in sS$. 故有 $r(x,y) = sS$.

(4)⇒(5)　设 $\varnothing \neq X \subseteq S$. 记 $\{b_j \mid j \in J\}$ 是 X 的所有公因子的集合. 对任意 $x \in X$，$x \in \bigcap_{j \in J} b_j S$. 所以 $\bigcap_{j \in J} b_j S \neq \varnothing$. 由(4)知存在 $d \in S$ 使得 $\bigcap_{j \in J} b_j S = dS$. 显然 d 即为 X 的最大公因子.

(5)⇒(2)　我们只需证明 S^I 的每一个不可分分量是投射的即可. 由命题 4.5 知，S^I 的包含元素 $a = g(a)a'$ 的不可分分量为 Sa'. 设 $sa' = ta'$，$a' = (a_i')_{i \in I}$，则对任意 $i \in I$，$sa_i' = ta_i'$，所以 $a_i' \in r(s,t)$. 设 $r(s,t) = uS$，则 u 是 $\{a_i' \mid i \in I\}$ 的公因子. 由引理 4.3 知 $\{a_i' \mid i \in I\}$ 的最大公因子一定是 S 中的可逆元，所以 u 是可逆元. 因此 $r(s,t) = S$，从而 $s = t$. 这就证明了 $Sa' \simeq S$，所以 Sa' 是投射的. //

最后我们给出几个例子.

例 4.7　(1) 设 S 是所有自然数按普通乘法构成的幺半群，则任意投射 S- 系的直积仍为投射系.

(2) 设 $S = \{2^r \mid r$ 是有理数且 $r \geqslant 0\}$，则 S 按普通乘法构成幺半群. S 的子集合 $X = \{2^r \mid r$ 是有理数且 $r > \sqrt{2}\}$ 没有最大公因子. 所以投射 S- 系的直积不必是投射的.

§5　左 PP 幺半群

命题 5.1　循环 S- 系 Sa 是投射的当且仅当存在幂等元 $e \in$

S，使得 $ea = a$，且对任意 $x, y \in S$，$xa = ya \Rightarrow xe = ye$.

证明 设 Sa 是投射的，则 S-满同态 $f: S \to Sa, s \mapsto sa, \forall s \in S$，是可收缩的，所以存在 S-同态 $g: Sa \to S$ 使得 $fg = 1_{Sa}$. 设 $g(a) = e \in S$，则 $a = fg(a) = f(e) = ef(1) = ea$. 设 $xa = ya$，则 $xe = g(xa) = g(ya) = ye$. 所以 $e = e^2$.

反过来，设满足条件的幂等元 e 存在. 令 $g: Sa \to S$ 为 $g(sa) = se$. 显然 g 是 S-同态，且 $fg(sa) = f(se) = sea = sa$，即 $fg = 1_{Sa}$. 因此 S-满同态 f 是可收缩的，所以 Sa 是投射的. //

定义 5.2 设 A 是 S-系，$a \in A$，$e^2 = e \in S$. 称 a 是 e 可消的，如果 $ea = a$ 且对任意 $x, y \in S$，$xa = ya \Rightarrow xe = ye$.

定义 5.3 称 S 是左 PP 幺半群，如果 S 的任意主左理想是投射左 S-系.

下面的命题是显然的.

命题 5.4 S 是左 PP 幺半群当且仅当对于 S 的任意元 a，存在幂等元 $e \in S$ 使得 a 是 e 可消的.

在第七章中我们将要讨论左 PP 幺半群的推广 —— 正则左 S-系. 左 PP 幺半群的概念在我们以后的讨论中占有很重要的地位. 下面给出一类特殊的左 PP 幺半群的结构定理，该结果是由 Fountain[46] 给出的.

定理 5.5 设 Γ 是具有单位元的半格，对任意 $\alpha \in \Gamma$，令 S_α 是右可消幺半群. 对 $\alpha, \beta \in \Gamma$ 且 $\alpha > \beta$，设有幺半群同态 $\varphi_{\alpha,\beta}: S_\alpha \to S_\beta$ 使得若 $\alpha > \beta > \gamma$，则有 $\varphi_{\alpha,\gamma} = \varphi_{\beta,\gamma} \cdot \varphi_{\alpha,\beta}$. 令 $\varphi_{\alpha,\alpha}$ 是 S_α 上的单位自同构，$S = \dot{\bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma}} S_\alpha$，规定 S 中的乘法运算如下：

$$a_\alpha \cdot b_\beta = \varphi_{\alpha,\alpha\beta}(a_\alpha)\varphi_{\beta,\alpha\beta}(b_\beta), \quad \forall\, a_\alpha \in S_\alpha, b_\beta \in S_\beta,$$

则 S 是左 PP 幺半群，且其幂等元都是中心元.

反之，任意幂等元都是中心元的左 PP 幺半群都可按上述方法构造.

证明 容易证明 $S = \dot{\bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma}} S_\alpha$ 按照如上定义的乘法运算构成一个半群. 又因为 Γ 有单位元且 S_α 是幺半群，所以 S 也是幺半群(S

的单位元就是 S_{α_0} 的单位元，这里 α_0 是 Γ 的单位元）.

记 S_α 的单位元为 e_α，$\alpha\in\Gamma$. 显然 $E(S)=\{e_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$. 设 $a\in S_\beta$，$\beta\in\Gamma$，则有

$$\begin{aligned}a\cdot e_\alpha &= \varphi_{\beta,\alpha\beta}(a)\varphi_{\alpha,\alpha\beta}(e_\alpha)=\varphi_{\beta,\alpha\beta}(a)e_{\alpha\beta}\\ &= e_{\alpha\beta}\varphi_{\beta,\alpha\beta}(a)=\varphi_{\alpha,\alpha\beta}(e_\alpha)\varphi_{\beta,\alpha\beta}(a)=e_\alpha\cdot a,\end{aligned}$$

这里 $\varphi_{\alpha,\alpha\beta}(e_\alpha)=e_{\alpha\beta}$ 是因为 $\varphi_{\alpha,\alpha\beta}$ 是幺半群同态. 所以 e_α 和 S 的所有元都可交换，因此幂等元都是中心元.

设 $a\in S_\alpha$，则显然有 $e_\alpha a=a$. 设 $s\in S_\beta$，$t\in S_\delta$，满足 $sa=ta$，则

$$\varphi_{\beta,\alpha\beta}(s)\varphi_{\alpha,\alpha\beta}(a)=\varphi_{\delta,\delta\alpha}(t)\varphi_{\alpha,\delta\alpha}(a).$$

显然 $\alpha\beta=\delta\alpha$. 因为 $S_{\alpha\beta}$ 是右可消幺半群，所以有

$$\varphi_{\beta,\alpha\beta}(s)=\varphi_{\delta,\alpha\delta}(t).$$

因此 $\varphi_{\beta,\alpha\beta}(s)\varphi_{\alpha,\alpha\beta}(e_\alpha)=\varphi_{\delta,\alpha\delta}(t)\varphi_{\alpha,\alpha\delta}(e_\alpha)$，即 $se_\alpha=te_\alpha$. 所以 a 是 e_α- 可消的. 由命题 5.4 即知 S 是左 PP 幺半群.

反过来，设 S 是左 PP 幺半群，且其幂等元都是中心元. 显然 $E(S)$ 是半格且含有单位元. 对任意 $e\in E(S)$，令

$$S_e=\{a\in S|a\text{ 是 }e\text{ 可消的}\}.$$

设 $e,f\in E(S)$，$a\in S_e\cap S_f$，则 a 是 e 可消的，也是 f 可消的. 因此 $ea=a$，$fa=a$. 所以 $ef=f$，$fe=e$. 从而 $e=f$. 这说明当 $e\neq f$ 时 $S_e\cap S_f=\varnothing$. 所以由命题 5.4 知有

$$S=\dot{\bigcup_{e\in E(S)}}S_e.$$

设 $e,f\in E(S)$，$a\in S_e$，$b\in S_f$，则 $efab=f(ea)b=fab=a(fb)=ab$. 若 $sab=tab$，则 $saf=taf$，故 $sfa=tfa$，所以 $sef=sfe=tfe=tef$. 这说明 ab 是 ef 可消的，所以 $ab\in S_{ef}$. 同理 $ba\in S_{ef}$. 所以对任意 $e\in E(S)$，S_e 是子半群，且以 e 为其单位元. 设 $a,b,c\in S_e$ 且 $ba=ca$，则 $be=ce$，即 $b=c$. 这说明每个 S_e 是右可消幺半群.

设 $e,f\in E(S)$ 且 $e\geqslant f$. 规定映射 $\varphi_{e,f}:S_e\to S_f$ 如下：

$$\varphi_{e,f}(a)=af,\quad\forall a\in S_e.$$

容易看出 $\varphi_{e,f}$ 是有定义的，且是幺半群同态. 设 $e \geqslant f \geqslant g$，则对任意 $a \in S_e$，$\varphi_{f,g}\varphi_{e,f}(a) = \varphi_{f,g}(af) = afg = ag = \varphi_{e,g}(a)$，所以 $\varphi_{f,g}\varphi_{e,f} = \varphi_{e,g}$. 又 $\varphi_{e,e}(a) = ae = ea = a$，所以 $\varphi_{e,e}$ 是 S_e 的单位自同构. 设 $a \in S_e$，$b \in S_f$，则

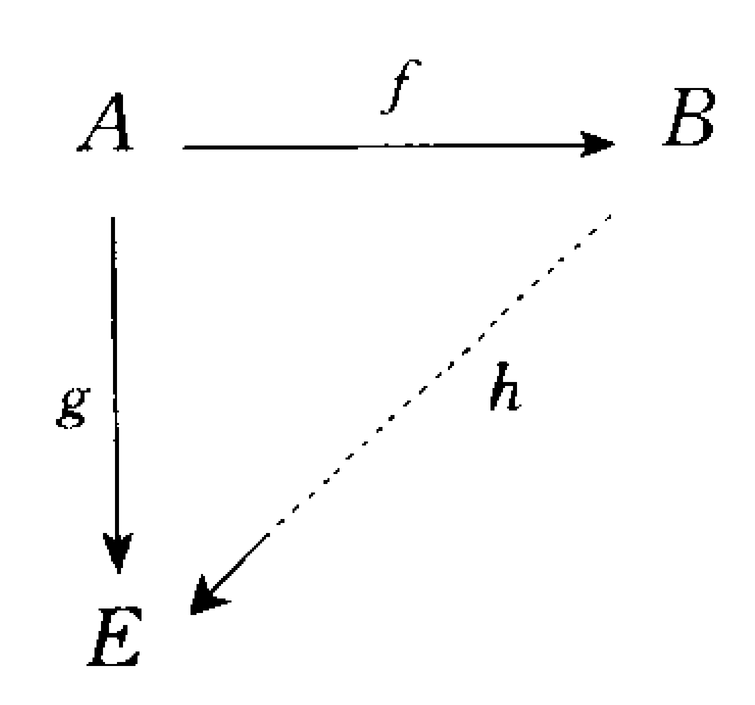
$$ab = efab = (aef)(bef) = \varphi_{e,ef}(a)\varphi_{f,ef}(b).$$

所以 S 具有所需要的结构. //

第三章　内射性

§1　内射 S- 系

定义 1.1　设 S 是幺半群，E 是 S- 系. 称 E 是内射的，如果对任意 S- 单同态 $f:A\to B$ 和任意 S- 同态 $g:A\to E$，存在 S- 同态 $h:B\to E$ 使得下图可换：

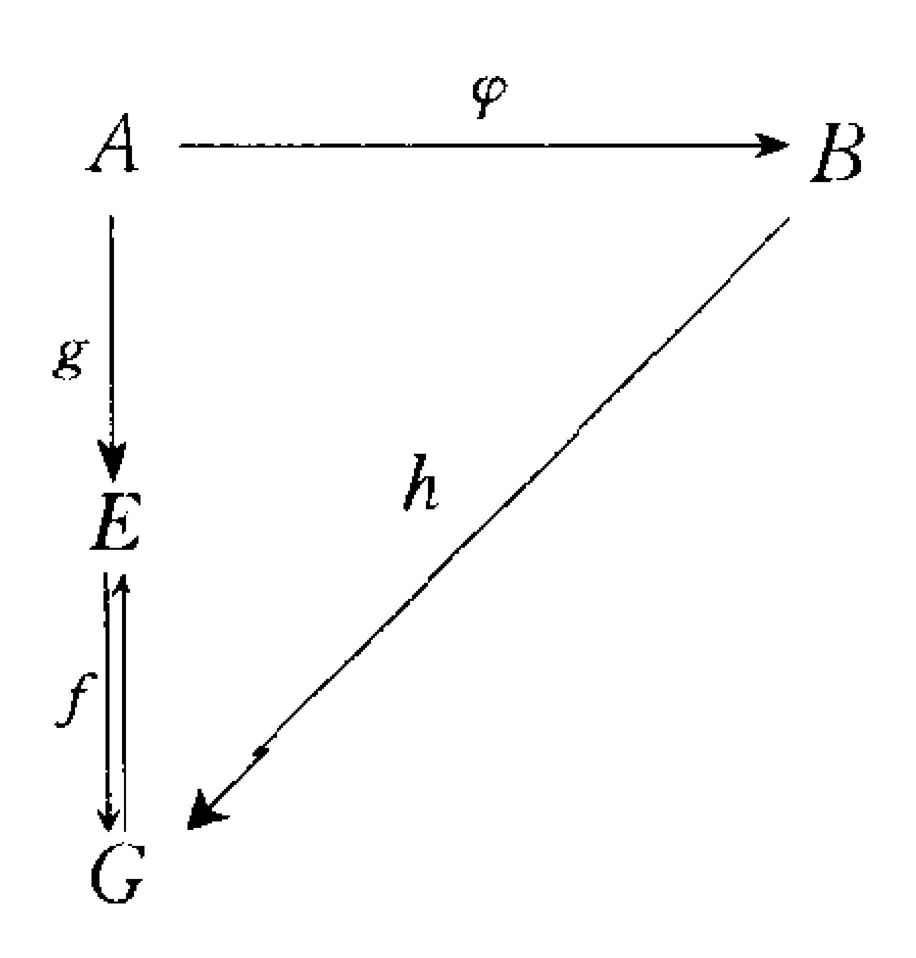


第二章中定义了 S- 满同态是可收缩的概念，并用来刻画投射 S- 系. 同样，为了刻画内射 S- 系，需要 S- 单同态是可收缩的概念.

设 $f:A\to B$ 是 S- 单同态. 称 f 是可收缩的，如果存在 S- 同态 $g:B\to A$ 使得 $gf=1_A$.

命题 1.2　设 S- 单同态 $f:E\to G$ 是可收缩的. 如果 G 是内射系，则 E 也是内射系.

证明　设 $\varphi:A\to B$ 是 S- 单同态，$g:A\to E$ 是 S- 同态. 由下图即得结论.



//

为了给出内射 S- 系的例子，对于任意 S- 系 A 我们引进下述记号：

$$A^S = \{f \mid f \text{ 是从 } S \text{ 到 } A \text{ 的映射}\}.$$

如下规定 S 在 A^S 上的左作用：

$$(sf)(x) = f(xs), \quad \forall f \in A^S, \forall s, x \in S.$$

显然 $sf \in A^S$. 对任意 $s, t, x \in S$，因为

$$(t(sf))(x) = (sf)(xt) = f(xts) = ((ts)f)(x),$$

$$(1f)(x) = f(x \cdot 1) = f(x),$$

所以 A^S 是 S- 系.

命题 1.3 对于任意 S- 系 A，A^S 是内射 S- 系.

证明 设 $\varphi: B \to C$ 是任意 S- 单同态，$g: B \to A^S$ 是任意 S- 同态. 如下定义映射 $h: C \to A^S$：对任意 $c \in C$，令

$$h(c)(t) = \begin{cases} g(\varphi^{-1}(tc))(1), & \text{如果 } tc \in \mathrm{Im}\varphi, \\ a, & \text{否则}, \end{cases}$$

这里 $a \in A$ 是事先任意固定的一个元素，$t \in S$. 因为 φ 是单同态，所以 $\varphi^{-1}(tc)$ 是唯一的. 因此 h 确实是从 C 到 A^S 的映射. 下证 h 还是 S- 同态. 对任意 $s, t \in S$，

$$h(sc)(t) = \begin{cases} g(\varphi^{-1}(tsc))(1), & \text{如果 } tsc \in \mathrm{Im}\varphi, \\ a, & \text{否则}, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} h(c)(ts), & \text{如果 } tsc \in \mathrm{Im}\varphi, \\ a, & \text{否则}, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (sh(c))(t), & \text{如果 } tsc \in \mathrm{Im}\varphi, \\ a, & \text{否则}, \end{cases}$$

所以 $h(sc)=sh(c)$. 即 h 是 S-同态.

又因为对任意 $b\in B$, 任意 $t\in S$, 有 $h\varphi(b)(t)=h(\varphi(b))(t)=g(\varphi^{-1}(t\varphi(b)))(1)=g(\varphi^{-1}(\varphi(tb)))(1)=g(tb)(1)=tg(b)(1)=g(b)(1\cdot t)=g(b)(t)$, 所以 $h\varphi=g$. 因此 A^S 是内射系. //

推论 1.4 任意 S-系 A 可嵌入到一个内射系中.

证明 由命题 1.3 知 A^S 是内射 S-系. 作映射 $\varphi:A\to A^S$ 为

$$\varphi(a):S\to A,\varphi(a)(x)=xa,\quad \forall\, x\in S,\forall\, a\in A.$$

对任意 $s,x\in S$, 任意 $a\in A$, $\varphi(sa)(x)=xsa=\varphi(a)(xs)=(s\varphi(a))(x)$, 所以 $\varphi(sa)=s\varphi(a)$, 即 φ 是 S-同态. 设 $a,b\in A$ 使得 $\varphi(a)=\varphi(b)$, 则对任意 $x\in S$, $\varphi(a)(x)=\varphi(b)(x)$, 即 $xa=xb$, 所以 $a=b$. 这说明 φ 还是单同态. //

下面我们可以给出内射 S-系的等价刻画.

定理 1.5 对于 S-系 E, 以下几条等价:

(1) E 是内射 S-系;

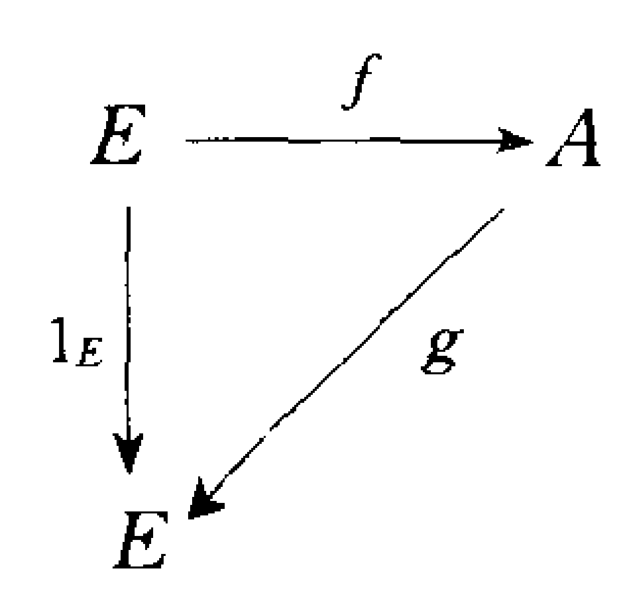
(2) 函子 $\mathrm{Hom}_S(-,E)$(从范畴 S-Act 到集合范畴) 把单同态变为满映射;

(3) 任意 S-单同态 $f:E\to A$ 是可收缩的;

(4) 存在 S-系 B 以及可收缩的 S-单同态 $f:E\to B^S$.

证明 (1)$\Leftrightarrow$(2) 是显然的.

(1)$\Rightarrow$(3) 对任意 S-单同态 $f:E\to A$, 由 E 的内射性可知存在 S-同态 $g:A\to E$ 使得下图交换:



所以 f 是可收缩的.

(3)$\Rightarrow$(4) 令 $B=E$, 由推论 1.4 知存在 S-单同态 $f:E\to E^S$. 由(3) 知 f 是可收缩的.

(4)⇒(1)　由命题 1.3 知 B^S 是内射系，所以由命题 1.2 知 E 也是内射系.　//

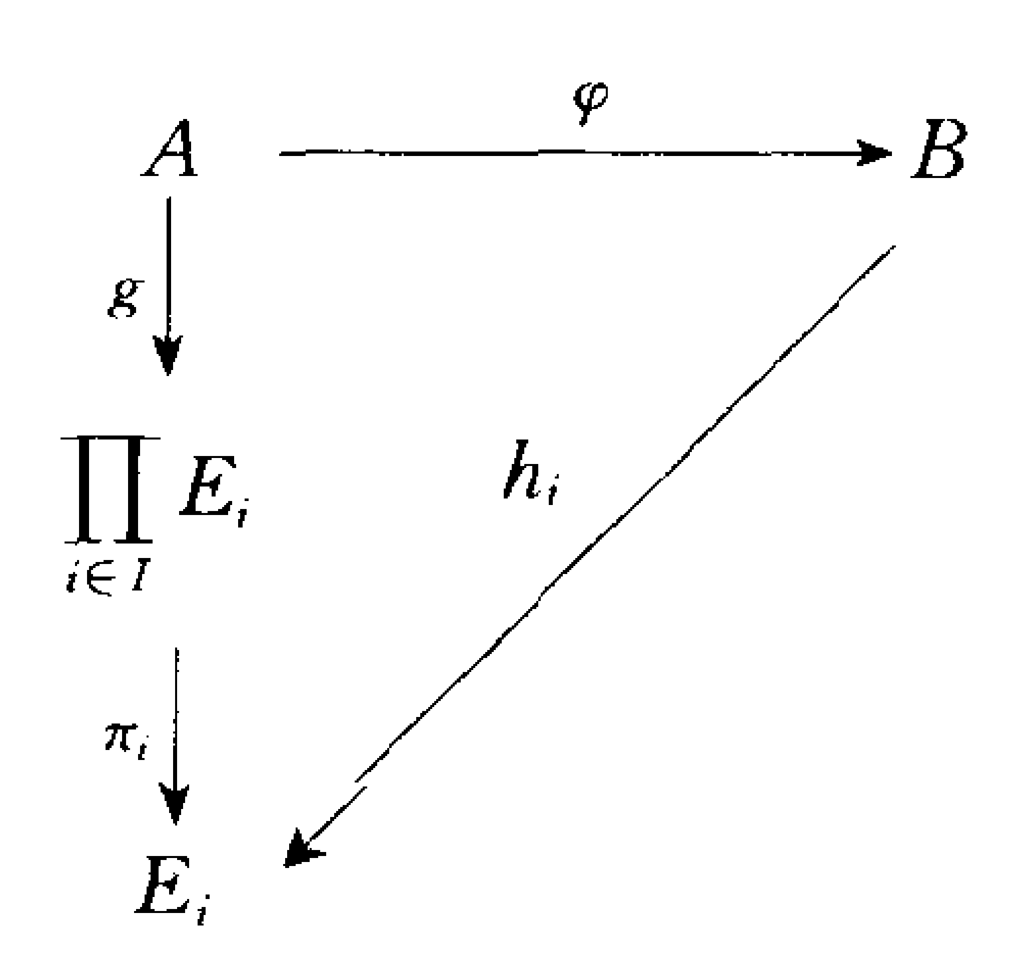
下面讨论内射 S- 系的若干性质.

命题 1.6　任意内射系必含有零元.

证明　设 E 是内射 S- 系. 记 $S^0 = S \dot{\cup} \{\theta\}$，其中 $\{\theta\}$ 是单元 S- 系. 显然有 S- 单同态 $f: S \to S^0$. 取定 $x \in E$. 作 S- 同态 $g: S \to E$ 为 $g(s) = sx, \forall\, s \in S$. 由 E 的内射性知存在 S- 同态 $h: S^0 \to E$ 使得 $hf = g$. 记 $h(\theta) = a \in E$，则对任意 $s \in S$，$sa = sh(\theta) = h(s\theta) = h(\theta) = a$，即 a 是 E 的零元.　//

命题 1.7　设 $E_i (i \in I)$ 是 S- 系，则 $\prod_{i\in I} E_i$ 是内射系当且仅当对任意 $i \in I$，E_i 是内射系.

证明　设每个 $E_i (i \in I)$ 都是内射系. 对于任意 S- 单同态 $\varphi: A \to B$ 和任意 S- 同态 $g: A \to \prod_{i\in I} E_i$，存在 S- 同态 $h_i: B \to E_i$ 使得下图可换：



所以由直积的定义即知存在 S- 同态 $h: B \to \prod_{i\in I} E_i$ 使得 $\pi_i h = h_i$，$\forall\, i \in I$. 所以 $\pi_i g = \pi_i h\varphi$. 由于 i 是任意的，所以 $g = h\varphi$. 即 $\prod_{i\in I} E_i$ 是内射的.

反过来，设 $\prod_{i\in I} E_i$ 是内射的，则由命题 1.6 知 $\prod_{i\in I} E_i$ 中含有零元，设其为 $\theta = (\theta_i)_{i\in I}$，这里 $\theta_i \in E_i$，$\forall\, i \in I$. 容易证明对任意 $i \in I$，θ_i 是 E_i 的零元. 由推论 1.4 知对任意 $i \in I$，存在内射 S- 系 A_i 以

及 S- 单同态 $f_i:E_i \to A_i$. 记 $\pi_i:\prod_{i\in I} E_i \to E_i$ 和 $\sigma_i:\prod_{i\in I} A_i \to A_i$ 为自然同态. 由直积的泛性质知存在 S- 同态 $f:\prod_{i\in I} E_i \to \prod_{i\in I} A_i$ 使得 $\sigma_i f = f_i\pi_i, \forall\ i \in I$. 设 $x,y \in \prod_{i\in I} E_i$ 使得 $f(x) = f(y)$, 则对任意 $i \in I$, $f_i\pi_i(x) = \sigma_i f(x) = \sigma_i f(y) = f_i\pi_i(y)$. 而 f_i 是单同态, 所以 $\pi_i(x) = \pi_i(y)$. 从而 $x = y$. 这说明 f 是 S- 单同态. 由 $\prod_{i\in I} E_i$ 的内射性即知 f 是可收缩的, 所以存在 S- 同态 $g:\prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} E_i$ 使得 $gf = 1$. 设 $i \in I$. 对任意 $a \in E_i$, 令

$$x_j = \begin{cases} a, & j = i, \\ \theta_j, & j \neq i, \end{cases}$$

则 $x_a = (x_j)_{j\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$. 显然映射 $\varphi:E_i \to \{x_a \mid a \in E_i\}, \varphi(a) = x_a$, 是 S- 同构且 $\varphi^{-1} = \pi_i$. 同理对任意 $a \in A_i$ 可定义 S- 同构 $\psi(a) \in \prod_{i\in I} A_i$ 且 $\psi^{-1} = \sigma_i$. 因此对任意 $a \in E_i$, $a = \pi_i\varphi(a) = \pi_i g f\varphi(a) = \pi_i g\psi f_i(a)$, 因此有 $\pi_i g\psi f_i = 1_{E_i}$. 这说明 S- 单同态 f_i 是可收缩的. 所以 E_i 是内射 S- 系. //

由定义可以看出, 内射系是投射系的对偶概念. 我们已知自由系是特殊的投射系. 下面我们给出余自由系的概念, 它是特殊的内射系.

定义 1.8 称 S- 系 A 是余自由的, 如果存在 S- 系 B 使得 $A \simeq B^S$.

显然, 余自由系是内射的, 反之则不然. 例如, 令 $S = \{1,0\}$, $A = \{\theta, a\}$. 按普通的定义即可使 A 成为 S- 系. 设 $\alpha,\beta \in A^S$ 分别为

$$\alpha(1) = \theta, \qquad \alpha(0) = \theta;$$
$$\beta(1) = a, \qquad \beta(0) = \theta,$$

则 $\{\alpha,\beta\}$ 是 A^S 的子系. 显然 $\{\alpha,\beta\}$ 不是余自由的. 但由定理 4.17 即知 $\{\alpha,\beta\}$ 是内射的.

我们知道, 任意 S- 系都是某个自由系的商系. 从推论 1.4 的

证明过程即得

命题 1.9 任意 S- 系都是某个余自由系的子系.

§2 内射包

设 A 为 S- 系. 由 §1 的内容知 A 可以嵌入于内射 S- 系之中，换言之，存在内射 S- 系包含 A 为子系. 直观地讲，我们希望找到一个"最小"的包含 A 的内射 S- 系. 这需要以下的概念.

定义 2.1 设 B 是 S- 系，A 是 B 的子系. 说 A 是 B 的基本子系，如果对任意 S- 系 C 和任意 S- 同态 $\varphi: B \to C$，若 $\varphi|_A$ 是单同态，则 φ 是单同态. 此时我们亦称 B 是 A 的基本扩张，或者 A 在 B 中是大的，记为 $A \leqslant_e B$.

命题 2.2 设 B 是 S- 系，A 是 B 的子系，则以下几条是等价的：

(1) A 是 B 的基本子系；

(2) 如果 λ 是 B 上的同余且 $\lambda \neq 1$，则 λ 限制在 A 上也不等于 1；

(3) 任意 $b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$，存在 $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$，使得 $a_1 \lambda(b_1, b_2) a_2$；

(4) 任意满足 $A \leqslant C \leqslant B$ 的 S- 系 C，若 C 上的同余 $\lambda \neq 1$，则 λ 限制在 A 上也不等于 1；

(5) 任意满足 $A \leqslant C \leqslant B$ 的 S- 系 C，若定义在 C 上的 S- 同态 φ 不是单同态，则 $\varphi|_A$ 也不是单同态.

证明 (1)⇒(2) 设 λ 是 B 上的同余且 $\lambda \neq 1$，则自然同态 $B \to B/\lambda$ 不是单同态，因此 $A \to B/\lambda$ 也不是单同态. 所以 λ 限制在 A 上不是恒等同余.

(2)⇒(3) 设 $b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$，则 $\lambda(b_1, b_2) \neq 1$. 由(2) 知 $\lambda(b_1, b_2)$ 限制在 A 上也不等于 1. 所以存在 $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$，但 $a_1 \lambda(b_1, b_2) a_2$.

(3)⇒(4)　设 λ 是 C 上的同余且 $\lambda \neq 1$，则存在 $b_1, b_2 \in C \leqslant B, b_1 \neq b_2$，使得 $b_1 \lambda b_2$. 由(3)知存在 $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$，满足 $a_1 \lambda(b_1, b_2) a_2$. 所以 $a_1 \lambda a_2$.

(4)⇒(5)　设 S-同态 $\varphi: C \to D$ 不是单的，则 $\mathrm{Ker}\varphi \neq 1$. 由(4)知 $\mathrm{Ker}\varphi$ 限制在 A 上也不等于 1，即存在 $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$，使得 $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$. 所以 $\varphi|_A$ 不是单同态.

(5)⇒(1)　令 $C = B$ 即可.　//

推论 2.3　设 $A \leqslant C \leqslant B$，则 $A \leqslant_e B \Leftrightarrow A \leqslant_e C$ 且 $C \leqslant_e B$.

证明　⇒)　显然.

⇐)　对任意 $b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$，存在 $c_1, c_2 \in C, c_1 \neq c_2$，满足 $(c_1, c_2) \in \lambda(b_1, b_2)$. 对于 c_1, c_2，又存在 $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$，满足 $(a_1, a_2) \in \lambda(c_1, c_2)$. 所以 $(a_1, a_2) \in \lambda(b_1, b_2)$.　//

推论 2.4　设 A 是 B 的基本子系. 若存在 S-系 $C, A \leqslant C \leqslant B$，使得自然包含同态 $A \to C$ 是可收缩的，则 $A = C$.

证明　设 S-同态 $g: C \to A$ 满足 $g|_A = 1$，则 $g = 1$，所以 $A = C$.　//

推论 2.5　设 B 是 A 的基本扩张，C 是 A 的内射扩张，则 B 同构于 C 的一个子系.

证明　由 C 的内射性知存在 S-同态 $f: B \to C$ 使得 $f|_A$ 是单同态，所以 f 是单同态.　//

为了给出内射 S-系的一个重要特征，我们需要下面的技术性引理.

引理 2.6　设 $A \leqslant B$，λ 是 B 上的同余且是集合

$$\{\lambda \mid \lambda \text{ 是 } B \text{ 上的同余}, \lambda \text{ 限制在 } A \text{ 上为恒等同余}\}$$

中的极大元，则 $A \simeq A/\lambda \leqslant_e B/\lambda$.

证明　$A \simeq A/\lambda$ 是显然的.

设 η 是 B/λ 上的同余，且 η 限制在 A/λ 上时为恒等同余. 定义

$$b_1 \rho b_2 \Leftrightarrow \overline{b_1} \eta \overline{b_2},$$

则 ρ 是 B 上的同余，且 ρ 限制在 A 上时为恒等同余. 设 $b_1 \lambda b_2$，则 $\overline{b_1} =$

$\overline{b_2}$，所以$\overline{b_1}\eta\overline{b_2}$，因此 $b_1\rho b_2$. 这说明 $\lambda\subseteq\rho$. 由 λ 的极大性即知 $\lambda=\rho$. 设 $b_1,b_2\in B$ 使得$\overline{b_1}\eta\overline{b_2}$，则 $b_1\rho b_2$，所以 $b_1\lambda b_2$，因此$\overline{b_1}=\overline{b_2}$. 这就证明了 η 是 B/λ 上的恒等同余. //

下面给出内射系的一个重要特征.

定理 2.7 S-系 A 是内射的当且仅当 A 没有真的基本扩张.

证明 设 A 是内射的，且 $A\leqslant_e B$，则包含同态 $A\to B$ 是可收缩的，所以存在 S-同态 $g:B\to A$，使得 $g|_A=1$. 由于 $A\leqslant_e B$，所以 g 是 S-单同态，因此 $A=B$.

反过来，设 A 没有真的基本扩张. 设 B 是 A 的真扩张，则 A 不是 B 的基本子系，所以存在 B 上的同余 $\lambda\neq 1$，但 λ 限制在 A 上时为恒等同余. 令 $\mathscr{D}=\{\rho\mid\rho$ 是 B 上的同余且 ρ 限制在 A 上时为恒等同余$\}$. 由 Zorn 引理知 $\mathscr{D}$ 中有极大元，设其为 λ. 由引理 2.6 即知 $A\simeq A/\lambda\leqslant_e B/\lambda$. 所以 $A/\lambda=B/\lambda$. 因此对任意 $b\in B$，存在唯一的 $a\in A$ 使得 $\bar{b}=\bar{a}$. 规定 S-同态 $f:B\to A$ 为 $f(b)=a,\forall\ b\in B$，则 $f|_A=1$. 所以 S-同态 $A\to B$ 是可收缩的. 这就证明了 A 是内射 S-系. //

定理 2.8 设 A 是 S-系，则存在内射 S-系 B 使得 $A\leqslant_e B$.

证明 由 §1 可知存在内射 S-系 E 使得 $A\leqslant E$. 令

$$\mathscr{D}=\{{}_SB\mid A\leqslant_e B\leqslant E\},$$

则 $\mathscr{D}\neq\varnothing$. 设

$$B_1\leqslant B_2\leqslant\cdots$$

是 $\mathscr{D}$ 中的升链. 令 $B=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$，由命题 2.2(3) 容易证明 $A\leqslant_e B$. 所以由 Zorn 引理知 $\mathscr{D}$ 中有极大元，设其为 B. 若 C 是 B 的基本扩张，则由推论 2.3 知 C 是 A 的基本扩张，所以 $B=C$. 这说明 B 没有真的基本扩张，因此由定理 2.7 知 B 是内射的. //

定义 2.9 S-系 A 的内射的基本扩张称为 A 的内射包.

定理 2.8 告诉我们，任意 S-系 A 都有内射包.

定理 2.10 S-系 A 的内射包在同构的意义下是唯一的.

证明 由推论 2.5 和定理 2.7 容易证明. //

因此我们把 S- 系 A 的内射包记为 $I(A)$.

下面的定理告诉我们 A 的内射包 $I(A)$ 即为“最小”的包含 A 的内射系.

定理 2.11 对 S- 系 A 和 B,以下几条是等价的:

(1) B 是 A 的内射包;

(2) B 是 A 的内射的基本扩张;

(3) B 是 A 的极大的基本扩张;

(4) B 是 A 的极小的内射扩张.

证明 由定理 2.7 和推论 2.5 容易证明(1)⇔(3).(2)即为内射包的定义.

(1)⇒(4) 设内射系 E 满足 $A \leqslant E \leqslant B$. 由 $A \leqslant_e B$ 即得 $E \leqslant_e B$. 所以由推论 2.4 知 $E = B$.

(4)⇒(1) 设 B 是 A 的极小的内射扩张,$I(A)$ 是 A 的内射包. 由推论 2.5 知 $I(A)$ 同构于 B 的一个子系. 而 $I(A)$ 是内射的,所以由 B 的极小性即知 $B \simeq I(A)$. //

许多特殊幺半群上的 S- 系的内射包已被具体地构造出来,参看[89,28,52] 等.

§3 完全 α- 绝对纯幺半群

S- 系 A 的内射性和 A 上方程组的可解性之间有密切的联系. 为了揭示这一联系,我们先介绍如下概念.

设 A 是 S- 系. A 上的任意方程应具有下列三种形式之一:

$$sx = a, \quad sx = ty, \quad sx = tx, \tag{*}$$

这里 $s, t \in S$, $a \in A$, x, y 是未定元. A 上的任意方程组都是若干个(有限或无限)上述方程构成的集合. 我们记 A 上的方程组 $\sum$ 中所含方程的个数为 $|\sum|$.

定义 3.1 称 A 上的方程组 $\sum$ 是容许的,如果 $\sum$ 在 A 的某个扩张系中有解.

下面的定理给出了 A 的内射性和 A 上方程组的可解性之间的联系.

定理 3.2 对于 S-系 A，以下两条是等价的：

(1) A 是内射的；

(2) A 上的任意容许方程组在 A 中有解.

证明 (1)⇒(2) 设 $\sum$ 是 A 上的容许方程组，则存在 A 的扩张系 B，使得 $\sum$ 在 B 中有解. 因为 A 是内射的，所以自然包含同态 $A \to B$ 是可收缩的，即存在 S-同态 $f: B \to A$ 使得 $f|_A = 1$. 显然 f 把 $\sum$ 在 B 中的解变为 $\sum$ 在 A 中的解.

(2)⇒(1) 设 B 是 A 的扩张系，则存在 $B - A$ 的子集合 C 使得 $B = A \cup (\bigcup_{c \in C} Sc)$. 定义 A 上的方程组

$$\sum = \{sx_c = a \mid sc = a \in A, c \in C\}$$
$$\cup \{sx_c = tx_d \mid sc = td, c, d \in C\}.$$

显然 $\sum$ 在 B 中有解 $\{c \mid c \in C\}$，所以 $\sum$ 是 A 上的容许方程组. 因此 $\sum$ 在 A 中有解，设解为 $\{a_c \mid c \in C\}$. 定义映射 $\varphi: B \to A$ 为

$$\varphi(a) = a, \quad \forall a \in A,$$
$$\varphi(sc) = sa_c, \quad \forall s \in S, \forall c \in C.$$

容易验证 φ 是有定义的，且 φ 是 S-同态，$\varphi|_A = 1$. 所以包含同态 $A \to B$ 是可收缩的，故 A 是内射系. //

定义 3.3 设 B 是 S-系，A 是 B 的子系，α 是无穷基数. 称 A 在 B 中是 α-纯的(或称 A 是 B 的 α-纯子系)，如果 A 上只有一个未知元且满足 $|\sum| < \alpha$ 的任意方程组 $\sum$，若 $\sum$ 在 B 中有解，则在 A 中一定有解. 如果 A 在它的任意扩张系中都是 α-纯的，那么就称 A 是 α-绝对纯的，

由定理 3.2 知对任意无穷基数 α，内射系是 α-绝对纯的. 显然 S-系 A 是 α-绝对纯的当且仅当 A 上的只有一个未定元且满足 $|\sum| < \alpha$ 的任意容许方程组 $\sum$ 在 A 中一定有解.

定义 3.4 称幺半群 S 是完全左内射的，如果任意 S-系是内

射的. 完全右内射幺半群可类似地定义. 称幺半群S是完全α-绝对纯的,如果任意S-系都是α-绝对纯的.

关于完全左内射幺半群的讨论我们放在下一节. 本节主要研究完全α-绝对纯幺半群,其主要结果选自[116].

定理 3.2 表明,S-系A的内射性可通过A上容许方程组的可解性来刻画. 下面的定理说明,完全左内射幺半群也可通过α-绝对纯性来刻画.

定理 3.5 设S是幺半群,α是无穷基数且$\alpha > |S|$,则如下两条等价:

(1) S是完全α-绝对纯的;

(2) S是完全左内射幺半群.

证明 (2)⇒(1) 由定理 3.2 即得结论.

(1)⇒(2) 设A是S-系,我们要证明A是内射的. 记A的内射包为$I(A)$. 令

$\mathscr{D} = \{(B,\varphi) \mid A \leqslant B \leqslant I(A), \varphi \in \mathrm{Hom}_S(B,A)$ 且 $\varphi|_A = 1\}$.

因为$(A,1) \in \mathscr{D}$,所以$\mathscr{D} \neq \varnothing$. 设$(B_1,\varphi_1),(B_2,\varphi_2) \in \mathscr{D}$,规定$(B_1,\varphi_1) \leqslant (B_2,\varphi_2) \Leftrightarrow B_1 \leqslant B_2$ 且 $\varphi_2|_{B_1} = \varphi_1$. $\mathscr{D}$关于$\leqslant$构成一个半序集. 容易证明$\mathscr{D}$中的任意升链都有上界,故由Zorn引理知$\mathscr{D}$中有极大元,设其为(B_0,φ_0). 下证$B_0 = I(A)$. 否则若$B_0 \neq I(A)$,则存在$b \in I(A) - B_0$. 令$C = B_0 \cup Sb$,则$A \leqslant C \leqslant I(A)$. 考虑方程组

$$\sum = \{sx = a \mid sb = a, s \in S, a \in B_0\} \cup \{sx = tx \mid sb = tb, s,t \in S\}.$$

$\sum$只有一个未定元x,且

$$|\sum| \leqslant |S| + |S|^2 < \alpha.$$

又$\sum$在$I(A)$中有解b,故由B_0的α-绝对纯性知$\sum$在B_0中有解,设其为$a_0 \in B_0$. 作同态:$\varphi: C \to A$,

$$\varphi(a) = \varphi_0(a), \varphi(sb) = s\varphi_0(a_0), \forall\, a \in B_0, \forall\, s \in S.$$

设$sb = tb$,则方程$sx = tx \in \sum$. 所以有$sa_0 = ta_0$,故$\varphi(sb) =$

$s\varphi_0(a_0) = \varphi_0(sa_0) = \varphi_0(ta_0) = t\varphi_0(a_0) = \varphi(tb)$. 若存在 $s \in S$，使得 $sb = a \in B_0$，则方程 $sx = a \in \sum$. 故有 $sa_0 = a$. 所以 $\varphi(sb) = s\varphi_0(a_0) = \varphi_0(sa_0) = \varphi_0(a) = \varphi(a)$. 这就证明了 φ 是映射. 显然 φ 还是 S-同态. 因为 $\varphi|_A = \varphi_0|_A = 1$，所以 $(C,\varphi) \in \mathscr{D}$. 又显然 $(B_0,\varphi_0) \lneqq (C,\varphi)$. 这与 (B_0,φ_0) 的极大性矛盾. 所以 $B_0 = I(A)$. 故存在 S-同态 $\varphi_0: I(A) \to A$ 使得 $\varphi_0|_A = 1$. 这说明 A 是 $I(A)$ 的可收缩子系，因此 A 是内射的. //

我们称(*)式中的三类方程分别为 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 型方程. 由定理 3.5 的证明及定理 3.2 即知有

推论 3.6 S 是完全左内射幺半群当且仅当对于任意 S-系 $\boldsymbol{A}$，A 上的由 Ⅰ，Ⅲ 型方程构成的任意容许方程组在 A 中有解.

定义 3.7 设 A 是 S-系，λ 是 A 上的同余. 称 A 是 α-生成的，如果 A 的生成元集合之基数 $< \alpha$；称 λ 是 α-生成的，如果 λ 的生成元集合之基数 $< \alpha$. 称 A 是 α-表示的，如果 $A \simeq F/\lambda$，其中 F 是 α-生成的自由 S-系，λ 是 F 上的 α-生成同余. 称 A 是循环 α-表示的，如果 A 是 α-表示的且 $F = S$.

当 $\alpha = \aleph_0$ 时，α-生成即为有限生成. 我们称 $\aleph_0$-表示 S-系为有限表示 S-系，循环 $\aleph_0$-表示 S-系为循环表示 S-系.

以下总是假定 α 是无穷基数.

引理 3.8 设 B 是 S-系，A 是 B 的子系，则 A 在 B 中是 α-纯的当且仅当：对任意循环 α-表示 S-系 M，任意 S-同态 $f: M \to B$，M 的任意满足 $|L| < \alpha$，$f(L) \subseteq A$ 的子集合 L，存在 S-同态 $g: M \to A$，使得对任意 $x \in L$，$g(x) = f(x)$.

证明 设 A 在 B 中是 α-纯的. 因为 M 是循环 α-表示的，故可设 $M = S/\lambda$，这里 λ 是 S 上的 α-生成左同余. 如果 $L = \varnothing$ 且 $\lambda = 1_S$，则 $M = S$. 这时作同态 $g: M \to A$ 为 $g(s) = sa_0$，这里 a_0 是 A 中事先固定的某个元素，则 g 即满足要求. 下设 $\lambda \neq 1_S$ 或 $L \neq \varnothing$. 设 λ 的生成元集为 C，则 $|C| < \alpha$. 对任意 $z \in L$，z 可表示为 $\overline{u_z}$，$u_z \in S$. 取定某个 $u_z \in S$ 使得 $z = \overline{u_z}$. 记 $a_z = f(z) = f(\overline{u_z})$. 考虑方程组：

$$\sum = \{sx = tx \mid (s,t) \in C\} \cup \{u_z x = a_z \mid z \in L\},$$

$\sum$ 只有一个未定元,且

$$|\sum| = |C| + |L| < \alpha + \alpha = \alpha.$$

对任意$(s,t) \in C$,有

$$sf(\bar{1}) = f(\bar{s}) = f(\bar{t}) = tf(\bar{1}).$$

又对任意 $z \in L$,有

$$u_z f(\bar{1}) = f(\bar{u}_z) = a_z.$$

所以$\sum$ 在 B 中有解 $f(\bar{1})$. 因为 A 在 B 中 α- 纯,所以$\sum$ 在 A 中有解,设其为 a. 作S- 同态 $g:M \to A, g(\bar{s}) = sa$. 设$\bar{s} = \bar{t}$,则 $s\lambda t$. 所以 $s = t$,或者存在 $u_1, \cdots, u_n \in S$, (s_i, t_i) 或$(t_i, s_i) \in C (i = 1, \cdots, n)$,使得

$$s = u_1 s_1, u_1 t_1 = u_2 s_2, \cdots, u_{n-1} t_{n-1} = u_n s_n, u_n t_n = t.$$

所以 $sa = u_1 s_1 a = u_1 t_1 a = u_2 s_2 a = u_2 t_2 a = \cdots = u_n t_n a = ta$. 这说明 g 是映射. 显然 g 是同态. 对任意 $z \in L, g(z) = g(\bar{u}_z) = u_z a = a_z = f(z)$.

反之,设$\sum$ 是A上的一个未定元的方程组,且$|\sum| < \alpha$, $\sum$ 在 B 中有解 b. 我们要证明$\sum$ 在 A 中有解. 令

$$H = \{(s,t) \mid s,t \in S, sx = tx \in \sum\}.$$

记λ为 H 生成的 S 的左同余. 因为 $|\sum| < \alpha$,所以 $|H| < \alpha$,故 S/λ 是循环α- 表示的. 令 $f:S/\lambda \to B$ 为 $f(\bar{s}) = sb$. 和前面的证明类似地可知 f 是S- 同态. 设

$$L = \{\bar{s} \in S/\lambda \mid \text{存在} \sum \text{中的方程 } sx = a, a \in A\},$$

则 $|L| \leqslant |\sum| < \alpha$,且对任意$\bar{s} \in L, f(\bar{s}) = sb = a \in A$. 所以由条件知存在$S$-同态$g:S/\lambda \to A$使得对任意$\bar{s} \in L$,有$g(\bar{s}) = f(\bar{s})$. 设 $g(\bar{1}) = a_0 \in A$. 对任意$(s,t) \in H, \bar{s} = \bar{t}$,所以 $sa_0 = sg(\bar{1}) = g(\bar{s}) = g(\bar{t}) = tg(\bar{1}) = ta_0$. 对任意方程 $sx = a \in \sum, sa_0 = sg(\bar{1}) = g(\bar{s}) = f(\bar{s}) = sb = a$. 所以 a_0 即为$\sum$ 在 A 中的解. //

称左S- 系 A 具有 α- 零元,如果对 S 的任意子集合 N,若$|N|$

$<\alpha$,则存在 $a\in A$,使得对任意 $s\in N$ 都有 $sa=a$. 显然若 A 包含一元子系,则 A 具有 α-零元(对于任意 α). 若 $|S|<\alpha$,则 A 具有 α-零元当且仅当 A 包含一元子系.

引理 3.9 对于左 S-系 A,以下两条等价:

(1) A 是 α-绝对纯的;

(2) A 具有 α-零元,且对于任意循环 α-表示左 S-系 C,C 的任意 α-生成的子系 B,任意 S-同态 $g:B\to A$,存在 S-同态 $f:C\to A$,使得 $f|_B=g$.

证明 (1)⇒(2) 设 $N\subseteq S$,且 $|N|<\alpha$. 考虑方程组

$$\sum=\{sx=1x\,|\,x\in N\}.$$

显然 $|\sum|<\alpha$. 因为 A 的内射包 $I(A)$ 是内射的,故存在 $b\in I(A)$ 使得对任意 $s\in S$,$sb=b$. 所以 $\sum$ 在 $I(A)$ 中有解. 而 A 是 α-绝对纯的,所以 $\sum$ 在 A 中有解. 即存在 $a\in A$,使得对任意 $s\in N$,有 $sa=a$.

设 $I(A)$ 是 A 的内射包,则存在 S-同态 $h:C\to I(A)$,使得 $h|_B=\sigma g$,这里 σ 是自然包含同态 $A\to I(A)$. 存在 B 的生成元集 M 使得 $|M|<\alpha$. 对任意 $b\in M$,$h(b)=\sigma g(b)=g(b)\in A$. 又因为 C 是循环 α-表示的,而 A 是 α-绝对纯的,所以由引理 3.8 知存在 S-同态 $f:C\to A$ 使得对任意 $b\in M$,$f(b)=h(b)$. 所以 $f(b)=g(b)$. 因此对任意 $x\in B$,有 $f(x)=g(x)$.

(2)⇒(1) 设 $A\leqslant B$,我们要证明 A 在 B 中是 α-纯的. 设 $M=S/\lambda$ 是循环 α-表示 S-系,$f:M\to B$ 是 S-同态,L 是 M 的子集合且 $|L|<\alpha$,$f(L)\subseteq A$. 由引理 3.8 我们只需证明存在 S-同态 $g:M\to A$,使得对任意 $z\in L$,有 $g(z)=f(z)$.

设 $L=\varnothing$. 若 $\lambda=1_S$,则取定 $a\in A$,令 $g:M\to A$ 为 $g(s)=sa$. 若 $\lambda\neq 1_S$,则设 λ 有一个生成元集 H 使得 $|H|<\alpha$. 设 $K=\{s\,|\,s\in S$,存在 $t\in S$,使得 (s,t) 或 $(t,s)\in H\}$,则 $|K|=|H|+|H|<\alpha+\alpha=\alpha$. 由条件知存在 $a\in A$,使得对任意 $s\in K$ 有 $sa=a$. 所以对任意 $(s,t)\in H$,$sa=a=ta$. 作映射 $g:M\to A$, $g(\bar{s})=sa$.

和引理 3.8 的证明类似地可知 g 是有定义的且为同态.

设 $L \neq \varnothing$. 记 $N = \bigcup_{a \in L} Sa$，则 N 有一个生成元集 L 满足 $|L| < \alpha$. 令 $h = f|_N : N \to B$，则 $h(a) = f(a) \in A$，$\forall\, a \in L$. 所以 h 是 N 到 A 的同态. 故由条件知存在 S-同态 $g: M \to A$ 使得$g|_N = h$. 所以对任意 $z \in L$，$g(z) = h(z) = f(z)$. //

称幺半群 S 具有 α-右零元，如果 S-系${}_SS$ 具有 α-零元.

定理 3.10 对于幺半群 S，以下条件等价：

(1) S 是完全 α-绝对纯幺半群；

(2) S 具有 α-零元，且对于 S 的任意 α-生成左同余 λ，任意 α-生成左理想 I，存在 $w \in I$，使得对于任意 $s \in S$，有 $s\lambda sw$，且对于任意 $s,t \in S$，若 $s\lambda t$，则 $sw\lambda tw$.

证明 (1)⇒(2) 设 $L \subseteq S$ 且 $|L| < \alpha$. 因为${}_SS$ 是 α-绝对纯的，故由引理 3.9 知 S 具有 α-右零元.

设 S 的左同余 λ 和左理想 I 如(2)所示，则 S/λ 是循环 α-表示 S-系，I/λ 是 S/λ 的子系，且 I/λ 是 α-生成的. 因为 I/λ 是 α-绝对纯的，所以由引理 3.9 知存在 S-同态 $f: S/\lambda \to I/\lambda$，使得 $f|_{I/\lambda} = 1$. 记 $f(\bar{1}) = \bar{w}$，$w \in I$，则对于任意 $s \in I$，$\overline{sw} = s\bar{w} = sf(\bar{1}) = f(\bar{s}) = \bar{s}$. 若 $s\lambda t$，则 $f(\bar{s}) = f(\bar{t})$，所以$\overline{sw} = s\bar{w} = sf(\bar{1}) = tf(\bar{1}) = t\bar{w} = \overline{tw}$.

(2)⇒(1) 设 A 是 S-系. 若 $L \subseteq S$ 且 $|L| < \alpha$，则由(2)知 S 具有 α-右零元，所以存在 $z \in S$，使得对于任意 $s \in L$，$sz = z$. 任取 $a \in A$，则对于任意 $s \in L$，$sza = za$. 这说明 A 具有 α-零元.

设 C 是循环 α-表示 S-系，B 是 C 的 α-生成子系. 设 L 是 B 的生成集且 $|L| < \alpha$. 设 $g: B \to A$ 是任意 S-同态. 不妨假定 $C = S/\lambda$，其中 λ 也是 α-生成的. 任意 $b \in L$，存在 $s_b \in S$，使得 $b = \bar{s}_b$. 令

$$K = \{s_b \mid b \in L\}, \quad I = \bigcup_{u \in K} Su,$$

则 I 是 S 的左理想. 又因为 $|K| = |L| < \alpha$，所以由条件可知存在 $w \in I$，使得对任意 $s \in I$，$s\lambda sw$，且对于任意 $s,t \in S$，$s\lambda t \Rightarrow sw\lambda tw$. 作映射 $f: C \to A$ 如下：

$$f(\bar{s}) = g(\overline{sw}), \quad \forall \bar{s} \in C.$$

容易证明 $B = I\bar{1}$,所以 $g(\overline{sw}) = g(sw\bar{1})$ 有意义. 设 $\bar{s} = \bar{t}$,则 $\overline{sw} = \overline{tw}$,所以 f 是有定义的. 显然 f 还是同态. 对任意 $x \in B$,存在 $b \in L$,$t \in S$ 使得 $x = tb$. 所以 $x = t\,\overline{s_b} = \overline{ts_b}$,故 $f(x) = f(\overline{ts_b}) = g(\overline{ts_b w}) = g(\overline{ts_b}) = g(x)$,即 $f|_B = g$. 所以由引理 3.9 即知 A 是 α- 绝对纯的. //

推论 3.11 对于幺半群 S,以下条件等价:

(1) S 是完全左内射幺半群;

(2) S 具有零元,且对于任意左同余 λ,任意左理想 I,存在 $w \in I$,使得对任意 $s \in I$,$s\lambda sw$,且对于任意 $s,t \in S$,$s\lambda t \Rightarrow sw\lambda tw$.

证明 令 α 是无穷基数且 $\alpha > |S|$. 由定理 3.10 知 S 含有右零元 θ. 由命题 4.1 知若 S 是完全左内射幺半群,则 S 的任意左理想可由幂等元生成. 设 $s \in S$,则有 $S\theta s \subseteq S\theta$ 或者 $S\theta \subseteq S\theta s$. 所以有 $\theta s = \theta$,即 S 含有零元. 其他结论由定理 3.10 和定理 3.2 即得. //

称 S- 系 A 是绝对几乎纯的,如果 A 是 $\aleph_0$- 绝对纯的.

推论 3.12 对于幺半群 S,以下条件等价:

(1) 所有 S- 系都是绝对几乎纯的,

(2) S 含有 $\aleph_0$- 右零元,且对于任意有限生成左同余 λ,任意有限生成左理想 I,存在 $w \in I$,使得对任意 $s \in I$,$s\lambda sw$,且对于任意 $s,t \in S$,$s\lambda t \Rightarrow sw\lambda tw$.

证明 在定理 3.10 中令 $\alpha = \aleph_0$ 即可. //

推论 3.13 设 S 是完全 α- 绝对纯幺半群,I 是 S 的 α- 生成左理想,则 I 可由幂等元生成.

证明 令同余 $\lambda = 1_S$,则由定理 3.10 知存在 $e \in I$,使得对任意 $s \in I$,$s\lambda se$. 所以 $s = se$. 特别地 $e^2 = e$. 显然 $I = Se$. //

下面我们给出一个幺半群的例子,它是完全 $\aleph_0$- 绝对纯的,但不是完全 $\aleph_1$- 绝对纯的.

例 3.14 设 $\mathbf{R}$ 是实数集合,任意 $a,b \in \mathbf{R}$,规定 $a \cdot b = b \cdot a = \min\{a,b\}$. 显然 $\mathbf{R}$ 关于上述乘法构成一个交换半群. 令 $S = \mathbf{R}^1$. 设 $a \in S$,$a \neq 1$,则 $Sa = \{b | b \in \mathbf{R}, b \leqslant a\}$. 显然 $S1 = S$. 设 I 是

S 的有限生成左理想，则存在 $a_1,\cdots,a_n\in S$，使得 $I=Sa_1\cup\cdots\cup Sa_n$. 若某个 $a_i=1$，则 $I=S$. 所以对任意左同余 λ，取 $w=1$ 即可利用定理 3.10. 下面假定 $a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{R}$. 记 $w=\max\{a_1,\cdots,a_n\}$，则 $I=\{b|b\in\mathbf{R},b\leqslant w\}=Sw$. 设 λ 是 S 上的任意左同余. 显然对任意 $s,t\in S$，若 $s\lambda t$，则 $sw\lambda tw$. 再设 $a_1,\cdots,a_m\in S$ 且 $a_i\neq 1,i=1,\cdots,m$. 令 $a_0=\min\{a_1,\cdots,a_m\}$，则对于任意 $i=1,\cdots,m$，有 $a_ia_0=a_0$. 若某个 $a_i=1$，则对于任意 $x\in S$ 都有 $a_ix=x$. 所以 S 具有 $\aleph_0$- 右零元. 由定理 3.10 即知 S 是完全 $\aleph_0$- 绝对纯的.

如果 S 还是完全 $\aleph_1$- 绝对纯幺半群，则由定理 3.10 知 S 具有 $\aleph_1$- 右零元. 令

$$H=\{-1,-2,-3,\cdots\}\subseteq S.$$

因为 $|H|=\aleph_0<\aleph_1$，所以存在 $a\in S$，使得对任意 $h\in H$，有 $ha=a$. 显然 $a\neq 1$. 所以 $ha=\min\{h,a\}$. 由 h 的任意性即得矛盾. 所以 S 不是完全 $\aleph_1$- 绝对纯幺半群. //

推论 3.12 给出了所有 S- 系都是绝对几乎纯的幺半群的“理想 —— 同余”特征刻画，关于这类幺半群的“元素 —— 理想”刻画可参见 Gould 的系列论文.

§4 完全左内射幺半群

§3 中得到了完全左内射幺半群的“理想 —— 同余”特征，这一节研究完全左内射幺半群的“元素 —— 理想”特征.

关于完全左内射幺半群的研究最早开始于 Feller 和 Gantos 的文章[35]，在该文中，作者研究了幂等元都是中心元的完全左内射幺半群. 随后在[36]中，Feller 和 Gantos 又研究了完全内射幺半群，即既是完全左内射又是完全右内射的幺半群. 还是 Feller 和 Gantos，在文[37]中研究了完全右内射群并. 这些都是特殊情形. 关于一般情形下完全左内射幺半群的特征刻画问题，分别被 Fountain[45]和 Isbell[71]独立地解决. 本节的内容主要选自于

Fountain 的文章[45].

首先给出完全左内射幺半群的若干简单性质.

命题4.1 如果S是完全左内射幺半群,那么S的任意左理想都可由幂等元生成.

证明 设L是S的左理想,则L是内射S-系.所以存在S-同态$f:S\to L$,使得$f|_L=1$.因此$L=f(S)=Sf(1)$,且$f(1)f(1)=f(f(1)1)=f(f(1))=f(1)$,即$f(1)$是幂等元. //

引理4.2 设S的任意有限生成左理想都可由幂等元生成,$e,f\in E(S)$.若$eS\subseteq fS$,则$Se\subseteq Sf$.

证明 设$eS\subseteq fS$,则$e=fe$.又因为$Se\cup Sf$可由幂等元生成,所以$Se\subseteq Sf$或者$Sf\subseteq Se$,因此有$e=ef$或者$f=fe$.总之有$Se\subseteq Sf$. //

命题4.3 设S的任意有限生成左理想都可由幂等元生成(例如,S是完全左内射幺半群),则

(1) S是纯整半群;

(2) 对任意$e,f\in E(S)$,$e\mathscr{R}f\Rightarrow e=f$;

(3) 对任意$e\in E(S)$,任意$a\in S$,任意$a',a''\in V(a)$,$aea'=aea''$.

证明 (1) 由命题4.1即知S是正则的.设$e,f\in E(S)$,则$Se\subseteq Sf$或$Sf\subseteq Se$.不妨设$Se\subseteq Sf$,则$e=ef$.所以

$$(fe)(fe)=f(ef)e=fee=fe,$$

即$fe\in E(S)$.所以S是纯整的.

(2) 设$e\mathscr{R}f,e,f\in E(S)$,则由引理4.2知$e\mathscr{L}f$.所以$e\mathscr{H}f$,从而$e=f$.

(3) 因为

$$\begin{aligned}(ae)(ea')(ae)&=aea'ae=a(a'ae)(a'ae)\\&=a(a'ae)=ae,\\(ea')(ae)(ea')&=ea'aea'=(ea'a)(ea'a)a'\\&=(ea'a)a'=ea',\end{aligned}$$

所以$ea'\in V(ae)$.同理$ea''\in V(ae)$.所以

$$aea' = (ae)(ea')\mathscr{R}(ae)\mathscr{R}(ae)(ea'') = aea''.$$

又因为$(aea')(aea') = a(ea'a)(ea'a)a' = a(ea'a)a' = aea'$，所以 $aea' \in E(S)$. 同理 $aea'' \in E(S)$. 所以由(2) 即知 $aea' = aea''$. //

命题 4.4 如下两条是等价的：

(1) S 的任意有限生成左理想可由幂等元生成；

(2) S 是纯整幺半群且 $E(S)$ 是左零半群的链.

证明 (1)⇒(2) 由命题 4.3 即知 S 是纯整幺半群. 令 $B = E(S)$. 由 Howie[70] 中的定理 Ⅳ.3.1 知 B 是矩形带 $E_\gamma(\gamma \in \Gamma)$ 的半格，且子半群 E_γ 即为 B 的 $\mathscr{D}$-类. 设 $e,f \in E_\gamma, e\mathscr{R}^B f$. 因为对于正则半群 S 有 $\mathscr{R}^B = \mathscr{R}^S \cap (B \times B)$，所以有 $e\mathscr{R}^S f$. 由命题 4.3 即知 $e = f$. 这说明对任意 $\gamma \in \Gamma, E_\gamma$ 是 B 的 $\mathscr{L}$-类，从而 E_γ 是左零半群. 设 $\alpha,\beta \in \Gamma, e \in E_\alpha, f \in E_\beta$，则 $Se \subseteq Sf$ 或 $Sf \subseteq Se$. 所以 $e = ef$ 或 $f = fe$，因此 $\alpha = \alpha\beta$ 或 $\beta = \beta\alpha$，从而 $\alpha \leqslant \beta$ 或 $\beta \leqslant \alpha$，即 Γ 是链.

(2)⇒(1) 直接验证. //

设 Γ 是半格. 我们称 Γ 是对偶良序的，如果 Γ 的任意非空子集中都有最大元.

命题 4.5 以下两条是等价的：

(1) S 的任意左理想都可由幂等元生成；

(2) S 是纯整幺半群，且存在对偶良序链 Γ，以及左零半群 $E_\gamma(\gamma \in \Gamma)$，使得 $E(S) = \dot{\bigcup}_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$，且对任意 $\alpha,\beta \in \Gamma$，若 $\alpha \leqslant \beta$，则 $E_\alpha E_\beta \subseteq E_\alpha \supseteq E_\beta E_\alpha$.

证明 (1)⇒(2) 由命题 4.4 即知 S 是纯整幺半群，且 $E(S)$ 是左零半群的链. 所以我们只需证明 Γ 是对偶良序的即可. 设 Λ 是 Γ 的非空子集. 对任意 $\alpha \in \Lambda$，取 $e_\alpha \in E_\alpha$，则左理想 $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} Se_\alpha$ 可由幂等元生成，设 $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} Se_\alpha = Se$. 容易证明存在 $\alpha_0 \in \Lambda$，使得 $Se_\alpha \subseteq Se_{\alpha_0}, \forall \alpha \in \Lambda$. 所以 α_0 即为 Λ 中的最大元.

(2)⇒(1) 设 L 是 S 的左理想. 因为 S 是正则的，所以 L 中有幂等元. 因此存在 $\alpha \in \Gamma$，使得 $L \cap E_\alpha \neq \varnothing$. 设 $\alpha \in \Gamma$ 是集合 $\{\alpha | \alpha$

$\in \Gamma, L \cap E_\alpha \neq \varnothing\}$ 中的最大元. 再设 $e \in L \cap E_\alpha$，则 $Se \subseteq L$. 设 $x \in L$，则 $x'x \in L$，这里 $x' \in V(x)$. 因此存在 $\beta \in \Gamma$，使得 $x'x \in E_\beta$. 显然 $\beta \leqslant \alpha$. 所以 $x'xe \in E_\beta E_\alpha \subseteq E_\beta$. 因为 E_β 是左零半群，所以 $x'x = (x'x)(x'xe) = x'xe \in Se$，从而 $x = xx'x \in Se$. 这就证明了 $L = Se$. 即任意左理想可由幂等元生成. //

设 B 是带. 定义 B 上的等价关系 $\mathscr{U}$ 为

$$\mathscr{U} = \{(e,f) \in B \times B \mid eBe \simeq fBf\}.$$

对任意 $(e,f) \in \mathscr{U}$，记 $W_{e,f}$ 为从 eBe 到 fBf 的所有同构的集合. 设 $\alpha \in W_{e,f}$. 如下定义 $\alpha_l \in \mathscr{J}(B/\mathscr{L})$ 和 $\alpha_r \in \mathscr{J}(B/\mathscr{R})$（这里 $\mathscr{J}(X)$ 表示集合 X 上的所有部分一一映射所构成的半群）：

$$\alpha_l(L_x) = L_{\alpha(x)}, \quad \alpha_r(R_x) = R_{\alpha(x)}, \quad \forall\, x \in eBe.$$

以 $\mathscr{T}_X$ 表示集合 X 上的所有全变换所构成的半群. 对任意 $(e,f) \in \mathscr{U}$，定义 $\rho_e \in \mathscr{T}_{B/\mathscr{L}}$ 和 $\lambda_f \in \mathscr{T}_{B/\mathscr{R}}$ 如下：

$$\rho_e(L_x) = L_{exe}, \quad \lambda_f(R_x) = R_{fxf}, \quad \forall\, x \in B.$$

记 $\mathscr{P}\mathscr{T}(X)$ 为集合 X 上的所有部分映射所构成的半群，则 $\mathscr{J}(X)$ 和 $\mathscr{T}(X)$ 都是 $\mathscr{P}\mathscr{T}(X)$ 的子半群. 所以我们可以在 $\mathscr{P}\mathscr{T}(B/\mathscr{L})$ 中作乘积 $\alpha_l\rho_e$，在 $\mathscr{P}\mathscr{T}(B/\mathscr{R})$ 中作乘积 $\alpha_r^{-1}\lambda_f$. 记

$$W_B = \bigcup_{(e,f)\in\mathscr{U}} \{(\alpha_l\rho_e, \alpha_r^{-1}\lambda_f) \mid \alpha \in W_{e,f}\}.$$

若 S 是半群，我们记 S^* 为 S 的反半群，即：作为集合，$S^* = S$，而 S^* 中的乘法定义为 $x * y = yx$.

定理 4.6 设 B 是带，则有

(1) W_B 是 $\mathscr{T}^*(B/\mathscr{L}) \times \mathscr{T}(B/\mathscr{R})$ 的纯整子半群；

(2) W_B 的幂等元带为 $B^* = \{(\rho_e, \lambda_e) \mid e \in B\}$，且 $B^* \simeq B$；

(3) 如果把 B^* 等同于 B，则在 W_B 中有

$$\mathscr{D} \cap (B \times B) = \mathscr{U};$$

(4) 设 $(e,f), (g,h) \in \mathscr{U}, \alpha \in W_{e,f}, \beta \in W_{g,h}$，则有

(i) $(\alpha_l\rho_e, \alpha_r^{-1}\lambda_f)\mathscr{R}^{W_B}(\beta_l\rho_g, \beta_r^{-1}\lambda_h) \Leftrightarrow f\mathscr{L}^B h$；

(ii) $(\alpha_l\rho_e, \alpha_r^{-1}\lambda_f)\mathscr{L}^{W_B}(\beta_l\rho_g, \beta_r^{-1}\lambda_h) \Leftrightarrow e\mathscr{R}^B g$.

该定理的证明可见 Howie 的[70]和 Hall 的[67]. 注意

$\mathscr{PT}(X)$ 中的合成映射是从右到左的复合，而在 Howie[70] 中的合成映射则是从左到右的复合.

称上面构造的纯整半群 W_B 为带 B 上的 Hall 半群.

定理 4.7 设 B 是带，则如下三条是等价的：

(1) $\mathscr{H}$ 是 W_B 上的左同余；

(2) 对任意纯整半群 S，若 $E(S)\simeq B$，则 $\mathscr{H}$ 是 S 上的左同余；

(3) 对任意 $e,f\in B$，任意同构 $\alpha,\beta: eBe\to fBf$，如果 $x\in eBe$，则 $\alpha(x)\mathscr{L}^B\beta(x)$.

证明 (2)⇒(1) 由定理 4.6 知这是显然的.

(1)⇒(3) 设 $e,f\in B$，且 $\alpha,\beta: eBe\to fBf$ 是同构，则 $(e,f)\in\mathscr{U}$ 而 $\alpha,\beta\in W_{e,f}$. 设 $x\in eBe$，则存在 $g\in B$，使得 $x=ege$. 设 gBg 上的单位自同构为 δ. 由定理 4.6 知 $(\alpha_l\rho_e,\alpha_r^{-1}\lambda_f)\mathscr{R}^{W_B}(\beta_l\rho_e,\beta_r^{-1}\lambda_f)$ 且 $(\alpha_l\rho_e,\alpha_r^{-1}\lambda_f)\mathscr{L}^{W_B}(\beta_l\rho_e,\beta_r^{-1}\lambda_f)$，所以有 $(\alpha_l\rho_e,\alpha_r^{-1}\lambda_f)\mathscr{H}^{W_B}(\beta_l\rho_e,\beta_r^{-1}\lambda_f)$. 因为 $\mathscr{H}$ 是 W_B 上的左同余，所以有

$$(\delta_l\rho_g,\delta_r^{-1}\lambda_g)(\alpha_l\rho_e,\alpha_r^{-1}\lambda_f)\mathscr{H}^{W_B}(\delta_l\rho_g,\delta_r^{-1}\lambda_g)(\beta_l\rho_e,\beta_r^{-1}\lambda_f).$$

在 W_B 中进行计算(参见 Howie[70] 中定理 Ⅵ 2.17 的证明)：

$$\delta_l\rho_g,\delta_r^{-1}\lambda_g)(\alpha_l\rho_e,\alpha_r^{-1}\lambda_f)=(\eta_l\rho_i,\eta_r^{-1}\lambda_j),$$

$$\delta_l\rho_g,\delta_r^{-1}\lambda_g)(\beta_l\rho_e,\beta_r^{-1}\lambda_f)=(\eta_l'\rho_h,\eta'^{-1}_r\lambda_k),$$

其中 $i=\delta^{-1}(geg)$，$j=\alpha(ege)$，$h=\delta^{-1}(geg)$，$k=\beta(ege)$，$\eta\in W_{i,j}$，$\eta'\in W_{h,k}$. 因此有

$$(\eta_l\rho_i,\eta_r^{-1}\lambda_j)\mathscr{R}^{W_B}(\eta_l'\rho_h,\eta'^{-1}_r\lambda_k),$$

由定理 4.6 即得 $j\mathscr{L}^Bk$，所以

$$\alpha(x)=\alpha(ege)\mathscr{L}^B\beta(ege)=\beta(x).$$

(3)⇒(2) 设 S 是纯整半群且 $E(S)\simeq B$，$a,b,c\in S$ 且 $a\mathscr{H}b$，则存在 $a'\in V(a)$，$b'\in V(b)$，使得 $a'a=b'b$，$aa'=bb'$.

为了方便，我们不妨设 $E(S)=B$. 显然 $ca\mathscr{R}^Scb$. 下面只需证明 $ca\mathscr{L}^Scb$，于是就有 $ca\mathscr{H}^Scb$.

如下定义映射 $\alpha,\beta: aa'Baa'\to a'aBa'a$：

$$\alpha(h)=a'ha,\quad \beta(h)=b'hb,\quad \forall\, h\in aa'Baa'.$$

显然 α,β 都是从 $aa'Baa'$ 到 $a'aBa'a$ 的同构，从而 $(aa',a'a)\in\mathscr{U}$，$\alpha,\beta\in W_{aa',a'a}$. 取 $c'\in V(c)$，则 $a'c'\in V(ca)$. 由条件(3) 知有

$$\alpha(aa'c'caa')\mathscr{L}^B\beta(aa'c'caa'),$$

从而有

$$\alpha(aa'c'caa')\mathscr{L}^S\beta(aa'c'caa').$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} ca\mathscr{L}^S a'c'ca &= a'aa'c'caa'a = \alpha(aa'c'caa'), \\ \mathscr{L}^S\beta(aa'c'caa') &= \beta(bb'c'cbb') \\ &= b'bb'c'cbb'b = b'c'cb\mathscr{L}^S cb. \end{aligned}$$ //

称带 B 是刚性的，如果对于任意 $(e,f)\in\mathscr{U}$，$|W_{e,f}|=1$.

引理 4.8 带 B 是刚性的，当且仅当对任意 $e\in B$，eBe 只有一个自同构.

证明 必要性是显然的. 下证充分性.

设对任意 $e\in B$，eBe 只有一个自同构. 再设 $(e,f)\in\mathscr{U}$，$\alpha,\beta\in W_{e,f}$ 且 $\alpha\neq\beta$，则 $\alpha,\beta:eBe\to fBf$ 是同构，所以 $\beta^{-1}\alpha$ 是 eBe 的自同构. 显然 $\beta^{-1}\alpha\neq 1$，所以 eBe 至少有两个自同构. 矛盾. //

命题 4.9 设 S 是纯整半群，其幂等元带是左零半群的链，且此链是刚性的，则 $\mathscr{H}$ 是 S 上的左同余.

证明 设 S 的幂等元带 $B=\dot{\bigcup\limits_{\delta\in\Gamma}}E_\delta$，其中 Γ 是链，且对任意 $\delta\in\Gamma$，E_δ 是左零半群，若 $\delta\leqslant\delta'$，则 $E_\delta E_{\delta'}\subseteq E_\delta\supseteq E_{\delta'}E_\delta$. 设 $x,y\in B$，且 $x\mathscr{L}^B y$，则 $x=xy$，$y=yx$. 所以容易证明 x 和 y 在同一个 E_δ 中. 反过来，因为 E_δ 是左零半群，所以对任意 $x,y\in E_\delta$ 都有 $x\mathscr{L}^B y$. 这说明每个 E_δ 都是 $\mathscr{L}^B$- 类.

设 $e,f\in B$，$\alpha,\beta:eBe\to fBf$ 是同构，$x\in eBe$. 由定理 4.7 知我们只需证明 $\alpha(x)\mathscr{L}^B\beta(x)$.

设 $e\in E_\delta$，$f\in E_{\delta'}$. 如下定义映射 $\bar{\alpha}:\delta\Gamma\to\delta'\Gamma$：对任意 $\mu\in\delta\Gamma$，如果存在 $x\in E_\mu\cap eBe$，使得 $\alpha(x)\in E_\xi$，则规定 $\bar{\alpha}(\mu)=\xi$. 设 $x,y\in E_\mu\cap eBe$，使得 $\alpha(x)\in E_\xi$，$\alpha(y)\in E_{\xi'}$. 因为 E_μ 是左零半群，所以 $\alpha(x)=\alpha(xy)=\alpha(x)\alpha(y)\in E_\xi E_{\xi'}$，因此 $\xi\leqslant\xi'$. 同理可证 ξ'

$\leqslant \xi$. 所以 $\xi = \xi'$. 又因为 $\alpha(x) \in fBf$,所以 $f\alpha(x) = \alpha(x)$. 由此即可得到 $\xi = \delta'\xi \in \delta'\Gamma$. 这就证明了 $\bar{\alpha}$ 是映射. 设 $\mu,\mu' \in \delta\Gamma$,存在 $x \in E_\mu \cap eBe, x' \in E_{\mu'} \cap eBe$,使得 $\alpha(x) \in E_\xi, \alpha(x') \in E_{\xi'}$,则 $xx' \in E_{\mu\mu'} \cap eBe, \alpha(xx') = \alpha(x)\alpha(x') \in E_{\xi\xi'}$. 这说明 $\bar{\alpha}(\mu\mu') = \bar{\alpha}(\mu)\bar{\alpha}(\mu')$,所以 $\bar{\alpha}$ 是同态. 对于如上的 μ,μ',x,x', 如果 $\alpha(x), \alpha(x') \in E_\xi$,那么 $\alpha(x)\mathscr{L}^B\alpha(x')$. 因为 α 是同构,所以 $x\mathscr{L}^B x'$,因此 $\mu = \mu'$. 这说明 $\bar{\alpha}$ 是单同态. 对任意 $\xi \in \delta'\Gamma, E_\xi \cap fBf \neq \varnothing$,所以易证 $\bar{\alpha}$ 是满同态. 总之我们证明了 $\bar{\alpha}$ 是同构.

同理,定义 $\bar{\beta}: \delta\Gamma \to \delta'\Gamma$,同样的证明可知 $\bar{\beta}$ 也是同构. 因为 Γ 是刚性的,所以 $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$. 对于 $x \in eBe$,存在 $\mu \leqslant \delta$,使得 $x \in E_\mu \cap eBe$. 因为 $\bar{\alpha}(\mu) = \bar{\beta}(\mu)$,所以存在 $\xi \in \delta'\Gamma$,使得 $\alpha(x), \beta(x) \in E_\xi$. 所以 $\alpha(x)\mathscr{L}^B\beta(x)$. //

现在我们就可以给出完全左内射幺半群的一个重要性质.

定理 4.10 设 S 的任意左理想都可由幂等元生成(例如 S 是完全左内射幺半群),则 $\mathscr{H}$ 是 S 上的左同余.

证明 由命题 4.5 知 S 是纯整幺半群,且 $E(S)$ 是左零半群的对偶良序链. 设 $E(S) = \dot{\bigcup}_{\delta\in\Gamma} E_\delta$,其中 E_δ 是左零半群,Γ 是对偶良序链. 由命题 4.9 知我们只需证明 Γ 是刚性的即可.

设 $\delta \in \Gamma$,α 是 $\delta\Gamma$ 上的自同构. 显然 $\alpha(\delta) = \delta$. 作集合

$$Y = \{\mu \in \delta\Gamma \mid \alpha(\mu) \neq \mu\},$$

设 $Y \neq \varnothing$,因为 Γ 是对偶良序链,所以 Y 中有最大元,设其为 μ_0,对任意 $\mu \in \delta\Gamma$,若 $\mu > \mu_0$,则 $\alpha(\mu) = \mu$. 考虑 $\alpha(\mu_0) \in \delta\Gamma$. 若 $\alpha(\mu_0) > \mu_0$,则 $\alpha(\alpha(\mu_0)) = \alpha(\mu_0)$,所以 $\alpha(\mu_0) = \mu_0$,矛盾. 因此 $\alpha(\mu_0) < \mu_0$. 对任意 $\xi \in \delta\Gamma$,若 $\xi > \mu_0$,则 $\alpha(\xi) = \xi$;若 $\xi \leqslant \mu_0$,则 $\alpha(\xi) \leqslant \alpha(\mu_0) < \mu_0$. 因此 $\mu_0 \in \delta\Gamma$ 没有原象. 矛盾.

矛盾说明 $Y = \varnothing$,即 α 为 $\delta\Gamma$ 上的单位自同构. 所以由引理 4.8 知 Γ 是刚性的. //

为了给出完全左内射幺半群的"元素 —— 理想"特征,我们还需要以下准备.

设 S 的任意有限生成左理想均可由幂等元生成. 再设 L 是 S 的左理想. 如下定义 S 上的关系 σ_L：

$$a\sigma_L b \Leftrightarrow a = b \in L, \text{或 } a,b \in S - L \text{ 且存在幂等元 } f \in S - L, \text{使得 } af = bf.$$

记 τ_L 为 σ_L 的传递包.

引理 4.11 τ_L 是 S 上的左同余.

证明 设 $L = Se, e \in E(S)$. 显然 σ_L 是自反的，对称的. 所以我们只需证明 σ_L 是左可乘的即可. 设 $a,b,c \in S$ 且 $a\sigma_L b$，则 $a = b \in L$ 或 $a,b \in S - L$ 且存在幂等元 $f \in S - L$，使得 $af = bf$. 若 $a = b \in L$，则 $ca = cb \in L$，所以 $ca\sigma_L cb$. 设后者成立. 因为 $f \in L$，所以 $Se \subseteq Sf$，从而 $e = ef$. 设 $ca \in L$，则 $cbf = caf = caef = cae \in L$. 假设 $cb \notin L$，则 $cb \neq cbf$，因此 $cb \notin Sf$，从而 $Sf \subseteq Scb = S(cb)'cb$，这里 $(cb)' \in V(cb)$. 所以 $f = f(cb)'cb$，从而 $f = f^2 = f(cb)'cbf \in L$，矛盾. 因此 $cb \in L$. 同理，若 $cb \in L$，则 $ca \in L$.

设 $ca,cb \in L$，则 $ca = cae = caef = caf = cbf = cbef = cbe = cb$，从而 $ca\sigma_L cb$.

设 $ca,cb \notin L$，则 $caf = cbf$，因此 $ca\sigma_L cb$. //

命题 4.12 设 S 是完全左内射幺半群，L 是 S 的左理想，则存在幂等元 e 使得 $L = Se$，且 e 和 $S - L$ 中的所有幂等元都可交换.

证明 由引理 4.11 知 τ_L 是 S 上的左同余，所以由 §3 中的推论知存在 $x \in L$，使得对任意 $y \in L$，有 $yx\tau_L y$，且 $s\tau_L t \Rightarrow sx\tau_L tx$. 因此对任意 $y \in L, yx = y$，从而 $x^2 = x, L = Sx$. 设 $f \in (S - L) \cap E(S)$，则由 $ff = 1f$ 知 $f\tau_L 1$，所以 $fx\tau_L x$. 但 $x, fx \in L$，所以 $x = fx$. 又因为 $Sx = L \subseteq Sf$，所以 $x = xf$，从而 $xf = fx$. //

引理 4.13 设 S 的任意有限生成左理想均可由幂等元生成，$e \in E(S), a,b \in S - Se$，则对于任意 $a' \in V(a), b' \in V(b)$，有

(1) $ea'\mathscr{R}e$；

(2) $ae\mathscr{L}e$；

(3) $ae\mathscr{R}be \Leftrightarrow aea' = beb'$；

(4) $ea'\mathscr{L}eb' \Leftrightarrow ea'\mathscr{H}eb'$.

证明 (1) 因为 $aa'a = a \notin Se$,所以 $Se \subseteq Sa'a$,从而 $e = ea'a$. 所以 $ea' \mathscr{R} e$.

(2) 因为 $a \notin Se$,所以 $Se \subseteq Sa$,因此 $Se = Se^2 \subseteq Sae \subseteq Se$,从而 $Se = Sae$,即 $ae \mathscr{L} e$.

(3) 由命题4.3知 S 是纯整半群,所以 $aea', beb' \in E(S)$. 由于 $ea' \in V(ae)$,所以 $aea' = (ae)(ea') = (ae)(ae)' \mathscr{R} ae$,同理 $beb' \mathscr{R} be$. 因此由命题 4.3 (2) 即得:$aea' = beb' \Leftrightarrow aea' \mathscr{R} beb' \Leftrightarrow ae \mathscr{R} be$.

(4) 由(1) 得 $ea' \mathscr{R} e \mathscr{R} eb'$,所以 $ea' \mathscr{L} eb' \Leftrightarrow ea' \mathscr{H} eb'$. //

设 L 是 S 的左理想,$a \in S - L$. 记

$$L_a = \{c \in S \mid ca \in L\},$$

则 L_a 是 S 的左理想.

引理 4.14 设 S 的任意左理想均可由幂等元生成,$L = Se$,$a \in S - L$,$a' \in V(a)$,则 $L_a = Saea'$. 如果 e 和 $S - L$ 中的所有幂等元都可交换,那么 $aea' \mathscr{L} ea'$,且对任意 $a, b \in S - L$,下述三条是等价的:

(1) $L_a = L_b$;

(2) 对任意 $a' \in V(a), b' \in V(b), ea' \mathscr{L} eb'$;

(3) 对任意 $a' \in V(a), b' \in V(b), ea' \mathscr{H} eb'$.

证明 和引理 4.13 的证明类似地可知 $e = ea'a$,所以 $aea'a = ae \in L$,因此 $aea' \in L_a$. 设 $L_a = Sf, f^2 = f \in S$. 因为 $aa'a = a \in S - L$,所以 $aa' \notin L_a$,因此 $Sf \subseteq Saa'$,从而 $f = faa'$. 由 $f \in L_a$ 知 $fa \in L$,所以 $faea' = faa' = f$,从而 $Sf \subseteq Saea'$. 这就证明了 $L_a = Saea'$.

设 e 和 $S - L$ 中所有幂等元都可交换,则 $ea'a = e = a'ae$,所以 $ea' = ea'aa' = a'aea' \in Saea' \subseteq Sea'$,从而 $ea' \mathscr{L} aea'$.

对于题设中所给的 a, b,由引理 4.13(1) 知 $ea' \mathscr{R} e \mathscr{R} eb'$. 所以,$ea' \mathscr{H} eb' \Leftrightarrow ea' \mathscr{L} eb' \Leftrightarrow aea' \mathscr{L} beb' \Leftrightarrow Saea' = Sbeb' \Leftrightarrow L_a = L_b$. //

引理 4.15 设 S 的任意左理想均可由幂等元生成,L 是 S 的左理想,则

(1) 如果 $a,b \in S - L$，σ 是 S 上的左同余且使得 L 是 σ-类的并，$a\sigma b$，那么 $L_a = L_b$；

(2) 设 $L = Se$，这里 $e \in E(S)$ 和 $S - L$ 中的所有幂等元都可交换. 如下定义 S 上的关系 λ_L：

$$a\lambda_L b \Leftrightarrow a,b \in S - L, L_a = L_b, \text{或 } a,b \in L, a\mathscr{R}b,$$

则 λ_L 是 S 上的左同余.

证明 (1) 设 $c \in L_a$，则 $ca \in L$. 由 $a\sigma b$ 得 $ca\sigma cb$，所以 $cb \in L$，即 $c \in L_b$. 所以 $L_a \subseteq L_b$. 同理可证 $L_b \subseteq L_a$.

(2) 显然 λ_L 是 S 上的等价关系. 设 $a,b,c \in S$，$a\lambda_L b$，则 $a,b \in S - L$，$L_a = L_b$，或 $a,b \in L$，$a\mathscr{R}b$. 若后一种情形出现，则有 $ca,cb \in L$，$ca\mathscr{R}cb$，从而 $ca\lambda_L cb$. 设 $a,b \in S - L$，$L_a = L_b$. 显然，$aa' \notin L_a$. 设 $c \in L_a$，则 $c \in L_a \subseteq Saa'$，因此 $c = caa'$. 所以 $cS = caa'S = caS$，因此 $ca\mathscr{R}c$. 同理 $c\mathscr{R}cb$. 所以 $ca\mathscr{R}cb$，且 $ca,cb \in L$，从而 $ca\lambda_L cb$. 下设 $c \notin L_a$. 此时 $ca,cb \notin L$. 我们只需证明 $L_{ca} = L_{cb}$. 因为 $L_a = L_b$，所以由引理 4.14 知对任意 $a' \in V(a)$，$b' \in V(b)$，有 $ea'\mathscr{L}eb'$，从而对任意 $c' \in V(c)$，有 $ea'c'\mathscr{L}eb'c'$. 而 $a'c' \in V(ca)$，$b'c' \in V(cb)$，所以再由引理 4.14 得 $L_{ca} = L_{cb}$. //

由 §3 的结果容易证明如下的

定理 4.16 对于幺半群，以下两条是等价的：

(1) S 是完全左内射幺半群；

(2) S 含有零元，且对任意左同余 λ，任意左理想 I，若 I 是 λ-类的并，则存在 $w \in I$，使得对任意 $s \in I$，$s\lambda sw$，且对任意 $s,t \in S$，$s\lambda t \Rightarrow sw\lambda tw$.

证明 我们只需证明(2)⇒(1).

设 λ 是 S 上的左同余，J 是 S 的左理想. 对任意 $a \in J$，记 J_a 为 a 所在的 λ-类. 令

$$I = \bigcup_{a \in J} J_a.$$

设 $s \in S$，$x \in J_a$，则 $sx\lambda sa$，所以 $sx \in J_{sa} \subseteq I$，即 I 是 S 的左理想，且 I 是 λ-类的并. 由(2) 知存在 $w \in I$ 使得对任意 $s \in I$，$s\lambda sw$，且对任意 $s,t \in S$，$s\lambda t \Rightarrow sw\lambda tw$. 设 $w \in J_a$，$a \in J$，则 $w\lambda a$. 所以对任意

$s \in J, sa\lambda sw\lambda s$，且对任意 $s, t \in S$，若 $s\lambda t$，则 $sa\lambda sw\lambda tw\lambda ta$. 所以由 § 3 的结果知 S 是完全左内射幺半群. //

现在就可以给出本节的主要结果 —— 完全左内射幺半群的"元素 —— 理想"特征.

定理 4.17 设 S 是幺半群，则以下条件是等价的：

(1) S 是完全左内射幺半群.

(2) S 含有零元；对 S 的任意左理想 I，存在 $e \in E(S)$，使得 $I = Se$，且对任意 $a, b \in S - I$，若 $I_a = I_b$，则 $aea' = beb'$，这里 $a' \in V(a), b' \in V(b)$.

证明 (1)⇒(2) 设 S 是完全左内射幺半群. 由定理 4.16 知 S 含有零元. 设 I 是 S 的左理想. 由命题 4.12 知存在幂等元 g 使得 $I = Sg$，且 g 和 $S - I$ 中的所有幂等元都可交换. 所以引理 4.15 中定义的关系 λ_I 是 S 上的左同余. 显然 I 是 λ_I- 类的并. 所以由定理 4.16 知存在 $x \in I$，使得对任意 $y \in I, yx\lambda_I y$，且对任意 $a, b \in S$，$a\lambda_I b \Rightarrow ax\lambda_I bx$. 即对任意 $y \in I, y\mathscr{R}yx$，且对任意 $a, b \in S - I$，若 $I_a = I_b$，则 $ax\mathscr{R}bx$. 对任意 $x' \in V(x), xx'\mathscr{R}x$，所以对任意 $y \in I$，$y\mathscr{R}yxx'$，且对任意 $a, b \in S - I$，若 $I_a = I_b$，则 $axx'\mathscr{R}bxx'$. 由命题 4.3(2) 知 $xx't$ 和 $x' \in V(x)$ 的选取无关.

设 $xx' \in I$. 记 $e = xx'$. 因为 $I = Sg$，所以 $e = eg$. 由前面的讨论可知 $g\mathscr{R}ge$，所以由命题 4.3 知 $g = ge$. 因此 $I = Sg = Se$. 对任意 $a, b \in S - I$，若 $I_a = I_b$，则 $ae\mathscr{R}be$，从而由 $aea' = (ae)(ea')\mathscr{R}ae, beb' = (be)(eb')\mathscr{R}be$ 知 $aea'\mathscr{R}beb'$. 但 $aea', beb' \in E(S)$，所以 $aea' = beb'$.

下设 $xx' \notin I$. 记 $f = xx'$. 对任意幂等元 h，显然有 $f = fh$ 或 $h = hf$. 设 $h \in S - I$. 类似于引理 4.11 的证明可知 $I_h = I_1$. 所以有 $hf\mathscr{R}1f = f$，因此 $hf = f$. 这说明 f 和 $S - I$ 中的所有幂等元都可交换. 所以对任意 $h \in S - I$，都有 $Sf \subseteq Sh$，且具有如此性质的 f 是唯一的.

因为 $Sf \nsubseteq I$，所以 $I \subseteq Sf$. 设 $a, b \in Sf - I$，则 $a'a, b'b \in Sf - I (a, b \in S - I)$，这里 $a' \in V(a), b' \in V(b)$. 由 f 的唯一性可

知有 $a'a = f' = b'b$. 又 $a = af, b = bf$，所以 $Sa = Sf = Sb$，即 $a\mathscr{L}b$. 如果 $I_a = I_b$，那么 $a = af\mathscr{R}bf = b$. 因此 $a\mathscr{H}b$.

由定理 4.10 知 $\mathscr{H}$ 是 S 上的左同余，显然 I 还是 $\mathscr{H}$-类的并. 所以由定理 4.16 知存在 $x_1 \in I$，使得对任意 $y \in I$，$y\mathscr{H}yx_1$，且对任意 $a,b \in S$，$a\mathscr{H}b \Rightarrow ax_1\mathscr{H}bx_1$. 特别地，$x_1\mathscr{H}x_1^2$，所以 x_1 所在的 $\mathscr{H}$-类 H_{x_1} 是群. 记这个群的单位元为 e_1. 容易证明对任意 $y \in I$，有 $y\mathscr{H}ye_1$，且对任意 $a,b \in S$，$a\mathscr{H}b \Rightarrow ae_1\mathscr{H}ax_1\mathscr{H}bx_1\mathscr{H}be_1$.

设 $a,b \in S - I$ 使得 $I_a = I_b$. 由引理 4.14 知 $Saga' = Sbgb'$，即 $aga'\mathscr{L}bgb'$，这里 $a' \in V(a)$，$b' \in V(b)$. 若 $af \in I$，则 $a'af \in I$. 又 $a'a \notin I$，而 f 和 $S - I$ 中的所有幂等元都可交换，所以 $a'af = fa'a = f$，因此 $f \in I$. 矛盾. 矛盾说明 $af \notin I$. 同理 $bf \notin I$.

由 $I = Sg \subseteq Sf$ 知 $g = gf$. 所以 $afgfa' = aga'$，从而 $(af)g(af)' = aga'$，这里 $(af)' \in V(af)$. 同理有 $(bf)g(bf)' = bgb'$. 所以 $(af)g(af)'\mathscr{L}(bf)g(bf)'$. 由引理 4.14 即得

$$I_{af} = I_{bf}.$$

又 $af, bf \in Sf - I$，所以由前面已证的结果即得 $af\mathscr{H}bf$. 所以 $afe_1\mathscr{H}bfe_1$.

令 $e = fe_1$，则 $e\mathscr{L}e_1$. 因为 $e_1 \in I = Sg$，所以 $e_1 = e_1g$. 又由 $g \in I$ 得 $g\mathscr{H}ge_1$，所以 $g = ge_1$. 因此 $I = Sg = Se_1 = Se$. 对任意 a，$b \in S - I$，若 $I_a = I_b$，则前面已证明了 $ae\mathscr{H}be$，从而 $ae\mathscr{R}be$. 所以 $aea' = (ae)(ea')\mathscr{R}ae\mathscr{R}be\mathscr{R}(be)(eb') = beb'$. 再由命题 4.3 即得 $aea' = beb'$.

(2)⇒(1)　设 I 是 S 的左理想，λ 是 S 上的左同余，使得 I 是 λ-类的并. 由(2)得知 $I = Se$，e 是满足条件(2)的幂等元. 对任意 $y \in I$，$ye = y$，所以有 $ye\lambda y$. 设 $a,b \in S$，使得 $a\lambda b$. 若 $a,b \in I$，则 $ae = a\lambda b = be$. 因此设 $a,b \in S - I$. 由引理 4.15 知 $I_a = I_b$. 所以由(2) 知对任意 $a' \in V(a)$，$b' \in V(b)$，有 $aea' = beb'$. 因此由 $a\lambda b$ 得 $aea'a\lambda beb'b$. 显然有 $a'a, b'b \in S - I$，所以 $I \subseteq Sa'a$，$I \subseteq Sb'b$，从而 $e = ea'a = eb'b$. 因此我们得到 $ae\lambda be$. 这就证明了 S 满足定理 4.16 的条件(2). 所以 S 是完全左内射幺半群. //

推论 4.18 设 S 的幂等元都是中心元，则以下两条等价：

(1) S 是完全左内射幺半群；

(2) S 的任意左理想都可由幂等元生成，且 S 含有零元.

证明 (1)⇒(2) 由命题 4.12 即得.

(2)⇒(1) 设 I 是 S 的左理想，λ 是 S 的左同余，由(2)知 $I = Se, e^2 = e \in S$. 所以对任意 $y \in I, y = ye$，故 $y\lambda ye$. 对任意 $a,b \in S$，若 $a\lambda b$，则 $ae = ea\lambda eb = be$. 由定理 4.16 即知 S 是完全左内射幺半群. //

§5 Bruck-Reilly 扩张

由定理 2.2.2 知完全左投射幺半群只有一个：{1}. 而 §4 的结果告诉我们，完全左内射幺半群则有很多. 设 S 是完全左内射幺半群，T 是 S 的 Bruck-Reilly 扩张. 我们要证明 T^0 也是完全左内射幺半群. 因此任意完全左内射幺半群可嵌入到单半群和 0 的不交并 T^0 中，且 T^0 仍是完全左内射幺半群.

设 S 是幺半群，记 H_1 为 1 所在的 $\mathscr{H}$-类. 设 θ 是从 S 到 H_1 的同态，$N = \{0,1,2,\cdots\}$. 在集合 $N \times S \times N$ 中定义乘法如下：

$$\begin{aligned}&(m,a,n)\cdot(p,b,q)\\ &=(m-n+t,\theta^{t-n}(a)\theta^{t-p}(b),q-p+t),\end{aligned}$$

这里 $t = \max(n,p)$，θ^0 是 S 上的单位同态. 可以证明，$(N \times S \times N, \cdot)$ 是幺半群，其幺元为(0,1,0). 这个半群叫做由 θ 决定的 S 的 Bruck-Reilly 扩张，记为 $BR(S,\theta)$. 下面的定理给出 $BR(S,\theta)$ 的主要性质，其证明可见 Howie[70].

定理 5.1 设 S 是幺半群，$T = BR(S,\theta)$，则有

(1) T 是单半群，(0,1,0) 是 T 的单位元；

(2) $(m,a,n) \in E(T) \Leftrightarrow m = n, a \in E(S)$；

(3) $(m,a,n)\mathscr{R}^T(p,b,q) \Leftrightarrow m = p, a\mathscr{R}^S b$,

$(m,a,n)\mathscr{L}^T(p,b,q) \Leftrightarrow n = q, a\mathscr{L}^S b$;

(4) T 是逆半群当且仅当 S 是逆半群.

下面是本节的主要定理.

定理5.2 设S是完全左内射幺半群,$T = BR(S,\theta)$,则T^0也是完全左内射幺半群.

证明 设 K 是T 的左理想,n 是集合

$$\{n \mid n \in N, \text{存在 } a \in S, m \in N, \text{使得} (m,a,n) \in K\}$$

中的最小者. 记

$$I = \{x \in S \mid \text{存在 } p \in N, \text{使得} (p,x,n) \in K\}.$$

容易证明I是S的左理想. 因为S是完全左内射幺半群,所以由定理 4.17 知存在$e \in E(S)$,使得$I = Se$,且对任意$a,b \in S - I$,若$I_a = I_b$,则$aea' = beb'$,这里$a' \in V(a)$,$b' \in V(b)$. 设$(p,e,n) \in K$,则$(n,e,n) = (n,e,p)(p,e,n) \in K$. 所以$T(n,e,n) \subseteq K$. 反过来设$(m,a,q) \in K$,则$q \geqslant n$. 所以

$$(m,a,q)(n,e,n) = (m,a\theta^{q-n}(e),q).$$

如果$q = n$,则$\theta^{q-n}(e) = e$,且$a \in I$,所以$a\theta^{q-n}(e) = ae = a$. 如果$q > n$,则$\theta^{q-n}(e) = 1$,所以$a\theta^{q-n}(e) = a$. 总之我们有$(m,a,q)(n,e,n) = (m,a,q)$,所以$(m,a,q) \in T(n,e,n)$. 因此$K = T(n,e,n)$. 由定理 5.1 知$(n,e,n) \in E(T)$.

设(k,a,q),$(h,b,p) \in T - K$. 由上面的证明过程可知$q \leqslant n$,$p \leqslant n$. 设$a' \in V(a)$,$b' \in V(b)$,则容易证明$(q,a',k) \in V(k,a,q)$,$(p,b',h) \in V(h,b,p)$. 记

$$\begin{aligned} x &= (k,a,q)(n,e,n)(q,a',k) \\ &= (k-q+n, \theta^{n-q}(a)e\theta^{n-q}(a'), k-q+n), \\ y &= (h,b,p)(n,e,n)(p,b',h) \\ &= (h-p+n, \theta^{n-p}(b)e\theta^{n-p}(b'), h-p+n). \end{aligned}$$

设 $K_{(k,a,q)} = K_{(h,b,p)}$,我们要证明 $x = y$.

由前面的证明已知T 的任意左理想都可由幂等元生成. 所以$x\mathscr{L}^T y$,从而由定理 5.1 知有

$$k - q + n = h - p + n,$$

$$\theta^{n-q}(a)e\theta^{n-q}(a')\mathscr{L}^S\theta^{n-p}(b)e\theta^{n-p}(b').$$

显然，$\theta^{n-q}(a')\in V(\theta^{n-q}(a))$，$\theta^{n-p}(b')\in V(\theta^{n-p}(b))$. 如果 $I=S$，则 $e=1$，并且 $q<n$，$p<n$. 所以

$$x=(k-q+n,1,k-q+n)=y,$$

这里用到了 $\theta^{n-q}(a)\theta^{n-q}(a')=1=\theta^{n-p}(b)\theta^{n-p}(b')$. 如果 $I\neq S$，则 $H_1\cap I=\varnothing$(因为 H_1 是群). 因此当 $q<n$ 时，$\theta^{n-q}(a)\notin I$. 当 $q=n$ 时，$\theta^{n-q}(a)=a$. 若 $a\in I$，则存在 $p\in N$，使得 $(p,a,n)\in K$. 因此

$$(k,a,n)=(k,1,p)(p,a,n)\in K,$$

即 $(k,a,q)\in K$，矛盾. 所以 $a\notin I$. 这样就有 $\theta^{n-q}(a)\notin I$. 同理 $\theta^{n-p}(b)\notin I$. 因为 S 是完全左内射幺半群，所以由定理 4.17 即得

$$\theta^{n-q}(a)e\theta^{n-q}(a')=\theta^{n-p}(b)e\theta^{n-p}(b').$$

因此 $x=y$.

设 K 是 T^0 的左理想，容易证明存在 $e\in E(T^0)$，使得 $K=T^0e$，且对任意 $a,b\in T^0-K$，若 $K_a=K_b$，则 $aea'=beb'$. 又 T^0 有零元，所以由定理 4.17 知 T^0 是完全左内射幺半群. //

因为 $T=BR(S,\theta)$ 是单半群，所以定理 5.2 说明任意完全左内射幺半群可嵌入到单半群和 0 的不交并 T^0 中，并且 T^0 仍是完全左内射幺半群.

由 §4 的讨论可知完全左内射幺半群一定是纯整半群. 借助于 Bruck-Reilly 扩张，我们下面给出一个完全左内射幺半群 S 的例子，使得 S 既不是逆半群，也不是群并.

例 5.3 设 E 是左零半群，G,H 是两个不同但同构的群. 设 $\varphi:G\to H$ 是同构，1 是 G 的单位元，1_H 是 H 的单位元. 令 $A=G\dot{\cup}(H\times E)$. 规定 A 上的乘法运算为

$$g(h,e)=(\varphi(g)h,e),$$
$$(h,e)g=(h\varphi(g),e),$$
$$\forall g\in G,\forall (h,e)\in H\times E,$$

A 上其他元素的运算按照原来的定义，则 A 是一个幺半群，1 为其幺元. 容易证明 A 还是纯整的群并，其幂等元带为 $\{1\}\cup(\{1_H\}\times$

E). 显然 A 的单位元所在的 $\mathscr{H}$- 类为 G. A 的左理想只有如下两个：

$$A = A1, \quad H \times E = A(1_H, e),$$

其中 e 是 E 中的任意元. 简单的计算可知 $(1_H, e)$ 和 $A - A(1_H, e)$ 中的所有元素都可交换，所以对任意 $a, b \in A - A(1_H, e) = G$, $a(1_H, e)a^{-1} = (1_H, e)aa^{-1} = (1_H, e) = (1_H, e)bb^{-1} = b(1_H, e)b^{-1}$. 设 ψ 是 G 的自同态. 如下定义 A 的自同态 θ:

$$\theta(h, e) = \psi\varphi^{-1}(h), \quad \forall\ (h, e) \in H \times E,$$
$$\theta(g) = \psi(g), \quad \forall\ g \in G,$$

则 $\theta(A) \subseteq G$. 根据乘法的定义容易证明 θ 是同态. 例如 $\theta(g(h, e)) = \theta(\varphi(g)h, e) = \psi\varphi^{-1}(\varphi(g)h) = \psi(g\varphi^{-1}(h)) = \psi(g)\psi\varphi^{-1}(h) = \theta(g)\theta(h, e)$. 作 Bruck-Reilly 扩张 $S = BR(A, \theta)$. 类似于定理 5.2 的证明可知 S^0 是完全左内射幺半群. 由定理 5.1 知 S^0 不是逆半群. 又 S^0 也不是群并. 否则 S 是群并，从而 S 是完全单半群(单的群并是完全单的)，所以 S 满足主左理想和主右理想的降链条件. 这和 $S = BR(A, \theta)$ 矛盾. //

设 S 是完全左内射幺半群，下面要证明和 S 相关的某些幺半群也是完全左内射的.

定理 5.4 设 S, T 是幺半群，$\varphi: S \to T$ 是同态满射且 $\varphi(1_S) = 1_T$. 如果 S 是完全左内射的，那么 T 也是完全左内射的.

证明 设 M, A, B 都是左 T- 系，且 A 是 B 的 T- 子系，$\alpha: A \to M$ 是 T- 同态. 对任意 $x \in M$，任意 $s \in S$，规定 $s * x = \varphi(s)x$，则 M 是左 S- 系. 同理，A, B 也可作成 S- 系，且 α 还是 S- 同态. 由于 M 是内射 S- 系，所以存在 S- 同态 $\beta: B \to M$，使得 $\beta|_A = \alpha$. 对任意 $b \in B$，任意 $t \in T$，存在 $s \in S$，使得 $\varphi(s) = t$，所以 $\beta(tb) = \beta(\varphi(s)b) = \beta(s * b) = s * \beta(b) = \varphi(s)\beta(b) = t\beta(b)$，因此 β 也是 T- 同态. 这就证明了 M 是内射 T- 系，所以 T 是完全左内射幺半群. //

命题 5.5 设 T 是幺半群 S 的正则子半群. 如果 S 的任意左理想都可由幂等元生成，那么 T 的任意左理想也可由幂等元生成.

证明 由命题 4.5 知 S 是纯整幺半群，且其幂等元带 B 是左

零半群 $E_\gamma(\gamma \in \Gamma)$ 的对偶良序链. 所以 T 的幂等元带 $B \cap T$ 也是左零半群 $E_\gamma \cap T$ 的对偶良序链, 由命题 4.5 即知 T 的任意左理想均可由幂等元生成. //

定理 5.6 设 S 是完全左内射幺半群, T 是 S 的正则子半群. 对任意 $e, f \in E(S)$, 若 $e \leqslant f$(即 $ef = fe = e$) 且 $f \in T$ 能推出 $e \in T$, 则 T^1 是完全左内射幺半群.

证明 设 $f \in T$ 是幂等元, 则由 $0 \leqslant f$ 即知 $0 \in T$. 由命题 5.5 知 T 的任意左理想均可由幂等元生成. 设 I 是 T 的真左理想, 则 $I = Te_1, T = Tf$, 这里 $e_1, f \in E(T)$. 由定理 4.17 知存在 $e \in E(S)$, 使得 $L = Se_1 = Se$, 且对任意 $a, b \in S - Se$, 若 $L_a = L_b$, 则 $aea' = beb'$. 若 $1 \in L$, 则 $L = Se_1 = S$, 所以 $T = Te_1 = I$, 与 I 是 T 的真左理想矛盾. 所以 $1 \notin L$. 设 $g^2 = g \in S - L$. 和引理 4.11 的证明类似地可以证明 $L_g = L_1$. 又 $g \in V(g), 1 \in V(1)$, 所以 $geg = 1e1$, 即 $e = geg$, 从而 $e = ge = eg$. 这说明 e 和 $S - L$ 中的所有幂等元都可交换. 若 $f \in L$, 则 $T = Tf \subseteq L = Se_1$, 所以 $T = I$, 又是矛盾. 因此 $f \notin L$. 所以 $ef = fe = e$. 由条件即知 $e \in T$, 所以 $I = Te$. 设 $a, b \in T - I$, 且满足 $I_a = I_b$, 则 $aea' \mathscr{L}^T beb'$, 这里 $a' \in V(a) \cap T$, $b' \in V(b) \cap T$. 所以由命题 4.3 知对任意 $a' \in V(a)$, 任意 $b' \in V(b)$, $aea' \mathscr{L}^S beb'$. 因为 $I = Te = T \cap Se$, 所以 $a, b \in S - L$. 由定理 4.17 即知 $aea' = beb'$. 所以再由定理 4.17 容易证明 T^1 是完全左内射幺半群. //

由定理 5.6 即可得如下推论.

推论 5.7 设 S 是完全左内射幺半群, I 是 S 的理想, 则 I^1 是完全左内射幺半群.

证明 设 $x \in I, x' \in V(x)$, 则 $x' = x'xx' \in I$, 即 I 是 S 的正则子半群. 所以由定理 5.6 即得结论. //

推论 5.8 设 S 是完全左内射幺半群, $e \in E(S)$, 则 eSe 是完全左内射的.

证明 由定理 5.6 容易证明. //

§6 完全内射幺半群

设 S 是幺半群，称 S 是完全内射幺半群，如果 S 既是完全左内射的，又是完全右内射的.

引理 6.1 设 S 的任意左、右理想都可由幂等元生成，$e,f \in E(S)$，则 $Se \subseteq Sf$ 当且仅当 $eS \subseteq fS$. 特别地，$Se = Sf$ 当且仅当 $eS = fS$.

证明 由引理 4.2 及其对偶即得结论. //

引理 6.2 设 S 的任意左、右理想都可由幂等元生成，则 S 是逆半群，且 $E(S)$ 是对偶良序链.

证明 显然 S 是正则的. 设 $e,f \in E(S)$，则有 $Se \subseteq Sf$ 或 $Sf \subseteq Se$. 若 $Se \subseteq Sf$，则由引理 6.1 知 $eS \subseteq fS$，所以 $e = ef = fe$. 若 $Sf \subseteq Se$，则同理可得 $f = ef = fe$. 所以 S 是逆半群且 $E(S)$ 是链.

设 $\{e_i | i \in I\}$ 是 $E(S)$ 的非空子集. 左理想 $L = \bigcup_{i\in I} Se_i$ 可由幂等元 g 生成，即 $\bigcup_{i\in I} Se_i = Sg$. 所以对任意 $i \in I$，$Se_i \subseteq Sg$. 由引理 6.1 知 $e_iS \subseteq gS$. 所以 $e_i \leqslant g$. 显然存在某个 $i_0 \in I$，使得 $g = e_{i_0}$，即 e_{i_0} 是 $\{e_i | i \in I\}$ 中的最大元. //

下面是完全内射幺半群的特征刻画.

定理 6.3 以下两条是等价的：

(1) S 是完全内射幺半群；

(2) S 含有零元，且其任意左、右理想均可由幂等元生成.

证明 (1)⇒(2) 由上一节的结论即得.

(2)⇒(1) 设 M,N,A 是左 S-系，$M \leqslant N$，$f: M \to A$ 是 S-同态. 令

$$\mathscr{A} = \{(P,g) | M \leqslant P \leqslant N, g \in \mathrm{Hom}_S(P,A), g|_M = f\}.$$

在 A 中规定偏序如下：

$$(P,g) \leqslant (P',g') \Leftrightarrow P \leqslant P', g'|_P = g.$$

显然 $\mathscr{A} \neq \varnothing$ 且满足 Zorn 引理的条件. 所以由 Zorn 引理知 $\mathscr{A}$ 中有极大元，设其为 (P_0, g_0). 下证 $P_0 = N$.

反设 $P_0 \neq N$. 取 $n \in N - P_0$. 记 $L = \{s \in S \mid sn \in P_0\}$. 如果 $L = \varnothing$，那么任意取定 $a \in A$，定义 S-同态 $h: Sn \to A$ 如下：对任意 $x \in Sn, h(x) = 0a$. 设 $L \neq \varnothing$，则 L 是 S 的左理想. 由条件知 $L = Se, e \in E(S)$. 因为 $n \notin P_0$，所以 $e \neq 1$. 定义 S-同态 $\varphi: L \to A$ 为

$$\varphi(s) = g_0(sn), \quad \forall\, s \in L.$$

令 $z = \varphi(e)$. 则对任意 $s \in L, \varphi(s) = \varphi(se) = s\varphi(e) = sz$，所以 $g_0(sn) = sz$.

定义映射 $h: Sn \to A$ 如下：

$$h(sn) = sez, \quad \forall\, s \in S.$$

首先说明 h 是有定义的：设 $s_1 n = s_2 n, s_1, s_2 \in S$，我们要证明 $s_1 ez = s_2 ez$. 由引理 6.2 知 S 是逆半群，所以 $s_1 en = s_1 s_1^{-1} s_1 en = s_1 e s_1^{-1} s_1 n = s_1 e s_1^{-1} s_2 n$. 同理 $s_2 en = s_2 e s_2^{-1} s_1 n$. 因为 $s_1 e, s_2 e \in L$，所以 $s_1 en, s_2 en \in P_0$，因此 $s_1 e s_1^{-1} s_2, s_2 e s_2^{-1} s_1 \in L$，从而 $s_1 e s_1^{-1} s_2 = s_1 e s_1^{-1} s_2 e, s_2 e s_2^{-1} s_1 = s_2 e s_2^{-1} s_1 e$. 所以

$$\begin{aligned} s_1 en &= s_1 e s_1^{-1} s_2 n = s_1 e s_1^{-1} s_2 en = s_1 e s_1^{-1}(s_2 en) \\ &= s_1 e s_1^{-1} s_2 e s_2^{-1} s_1 n = (s_1 e s_1^{-1})(s_2 e s_2^{-1}) s_1 en \\ &= (s_2 e s_2^{-1})(s_1 e s_1^{-1}) s_1 en = (s_2 e s_2^{-1}) s_1 s_1^{-1} s_1 en \\ &= s_2 e s_2^{-1} s_1 en = s_2 e s_2^{-1} s_1 n = s_2 en, \end{aligned}$$

从而 $h(s_1 n) = s_1 ez = g_0(s_1 en) = g_0(s_2 en) = s_2 ez = h(s_2 n)$. 这就证明了 h 是映射. 显然 h 还是 S-同态. 对任意 $x \in P_0 \cap Sn$，存在 $s \in S$，使得 $x = sn \in P_0$，所以 $s \in L$，从而 $se = s$. 因此 $h(x) = h(sn) = sez = sz = g_0(sn) = g_0(x)$. 这说明 h 和 g_0 在 $P_0 \cap Sn$ 上的作用是相同的.

令 $P^* = P_0 \cup Sn, f^*: P^* \to A$ 的定义如下：

$$f^*(x) = g_0(x), \quad \forall\, x \in P_0,$$
$$f^*(x) = h(x), \quad \forall\, x \in Sn.$$

由上面的讨论可知f^*是S-同态. 显然,$(P_0,g_0)<(P^*,f^*)$,这和(P_0,g)是$\mathscr{A}$的极大元矛盾.

矛盾说明,$P_0=N$. 因此A是内射S-系. 同理可以证明任意右S-系也是内射的. 所以S是完全内射幺半群. //

定理 6.4 幺半群S是完全内射的,当且仅当S是含0逆半群,且$E(S)$是对偶良序链.

证明 由定理 6.3,引理 6.2 和命题 4.5 即得此结论. //

下面给出一个是完全左内射但不是完全内射的幺半群的例子.

例 6.5 设T是右零半群,且$|T|\geqslant 2$. $S=T^{01}$,则由定理 6.4 知S不是完全内射的. 容易证明S的左理想只有三个:$0,T^0,S$. 设λ是S上的任意左同余. 取$w\in T$,则对任意$x\in T^0$,$x=xw$,从而$x\lambda xw$. 设$s\lambda t$且$s,t\in T^0$,则$sw=s\lambda t=tw$. 若存在$t_0\in T$,使得$t_0\lambda 1$,则我们还可以取$w=t_0$. 对于这样取的w,若$t\lambda 1$,$t\in T^0$,则$tw=t\lambda 1\lambda w=1\cdot w$. 所以由 §3 中的结果知$S$是完全左内射的. //

命题 6.6 设S是完全内射幺半群,$e\in E(S)$,则eSe也是完全内射幺半群.

证明 由定理 6.3 我们只需证明eSe的任意左、右理想均可由幂等元生成即可. 设L是eSe的左理想,则容易证明$L=SL\cap eSe$. 由条件可知$SL=Sf$,$f\in E(S)$. 所以$L=Sf\cap eSe=Sf\cap Se\cap eS=Sfe\cap eS$. 若$ef=e$,则$L=Se\cap eS=eSe$. 若$ef=f$,则$f=efe\in eSe$,且$L=Sf\cap eS=(eSe)f$. 总之,$L$可由幂等元生成. 同理可证所有右理想也可由幂等元生成. //

命题 6.7 完全内射幺半群的任意理想也是完全内射幺半群.

证明 设H是S的理想,则$H=Se=eS$,$e\in E(S)$. 所以$H=eS\cap Se=eSe$. 于是由命题 6.6 即得结论. //

下面考虑完全内射幺半群的性质. 先给出几个记号.

设K是幺半群S的子集合,定义S上的左同余$\lambda(K)$为

$$a\lambda(K)b \Leftrightarrow \text{对所有 } k\in K, ak=bk.$$

同理可定义 S 上的右同余 $\rho(K)$ 为

$$a\rho(K)b \Leftrightarrow \text{对所有 } k \in K, ka = kb.$$

设 σ 是 S 上的左同余，记

$$r(\sigma) = \{s \in S \mid \text{如果 } a\sigma b, \text{则 } as = bs\}.$$

同样若 σ 是 S 上的右同余，则记

$$l(\sigma) = \{s \in S \mid \text{如果 } a\sigma b, \text{则 } sa = sb\}.$$

显然 $l(\sigma)$ 和 $r(\sigma)$ 分别是 S 的左、右理想.

记 $\mathscr{K} = \{\mathrm{Ker} f \mid f: {}_SS \to {}_SS \text{ 是 } S\text{-同态}\}$.

命题 6.8 设 S 是完全内射幺半群，$e \in E(S)$，则 $r(\lambda(eS)) = eS, l(\rho(Se)) = Se$.

证明 设 $b \in r(\lambda(eS))$，则 $\lambda(e) \subseteq \lambda(b)$. 所以可以定义 S-同态 $f: Se \to Sb$,

$$f(xe) = xb, \quad \forall\, x \in S.$$

显然 $b = f(e) = ef(e) \in eS$. 所以 $r(\lambda(eS)) \subseteq eS$. $eS \subseteq r(\lambda(eS))$ 也是显然的. 所以 $r(\lambda(eS)) = eS$. 同理可证 $l(\rho(Se)) = Se$. //

命题 6.9 设 S 是完全内射幺半群，则 S 的右理想格和格 $\mathscr{K}$ 反同构.

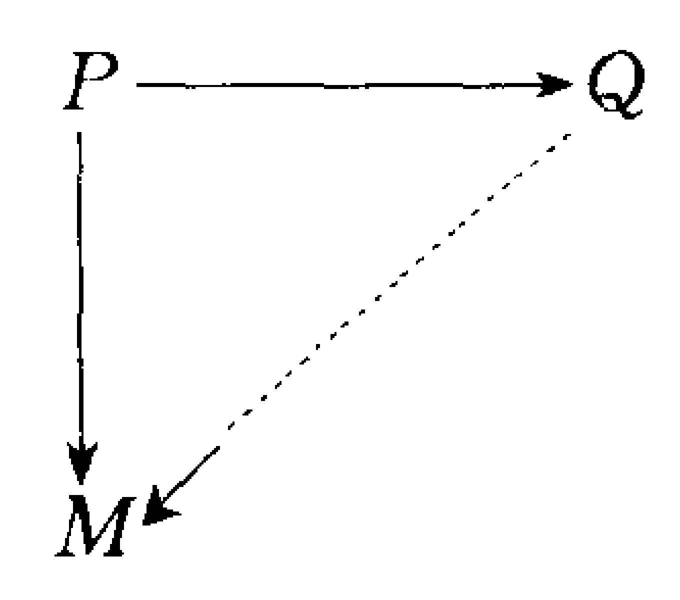
证明 对 S 的任意右理想 eS，$\lambda(eS) = \mathrm{Ker} h$，其中 $h: {}_SS \to {}_SS$ 的定义为：$h(x) = xe$. 所以 $\lambda(eS) \in \mathscr{K}$. 反过来，设 $h: {}_SS \to {}_SS$ 是 S-同态，则 $\mathrm{Ker} h = \lambda(h(1)S)$，而 $h(1)S$ 可以写成 $eS(e \in E(S))$ 的形式. 如果 $e_1S \subseteq e_2S$，那么显然有 $\lambda(e_1S) \supseteq \lambda(e_2S)$. 所以由命题 6.8 易知映射 $eS \to \lambda(eS)$ 是从 S 的右理想格到 $\mathscr{K}$ 的反同构. //

如果 S-系 ${}_SS$ 是内射的，则称幺半群 S 是自内射的. 关于自内射正则幺半群的研究结果可参看 Shoji 的系列论文.

§7 拟内射系

定义 7.1 设 Q 是 S-系. 称 S-系 M 是 Q-内射的，如果对任意 S-单同态 $P \to Q$，任意同态 $P \to M$，存在同态 $Q \to M$，使得下图

可换：



显然S-系M是内射的当且仅当对于任意S-系Q，M是Q-内射的.

定义 7.2 称S-系M是拟内射的，如果M是M-内射的.

显然内射系一定是拟内射的. 设幺半群S没有真左理想，即S是群，则S-系$_SS$是拟内射的. 但当$|S|\geqslant 2$时，由命题1.6知$_SS$不是内射系.

本节中我们总是假定幺半群S含有零元$0\neq 1$，且所考虑的S-系均为S^0-Act中的对象，即均为中心S-系.

和内射性、拟内射性的定义类似地可在S^0-Act中定义内射对象和拟内射对象. 本节所说的内射系和拟内射系均指S^0-Act中的内射对象和拟内射对象.

我们还需要直和的概念.

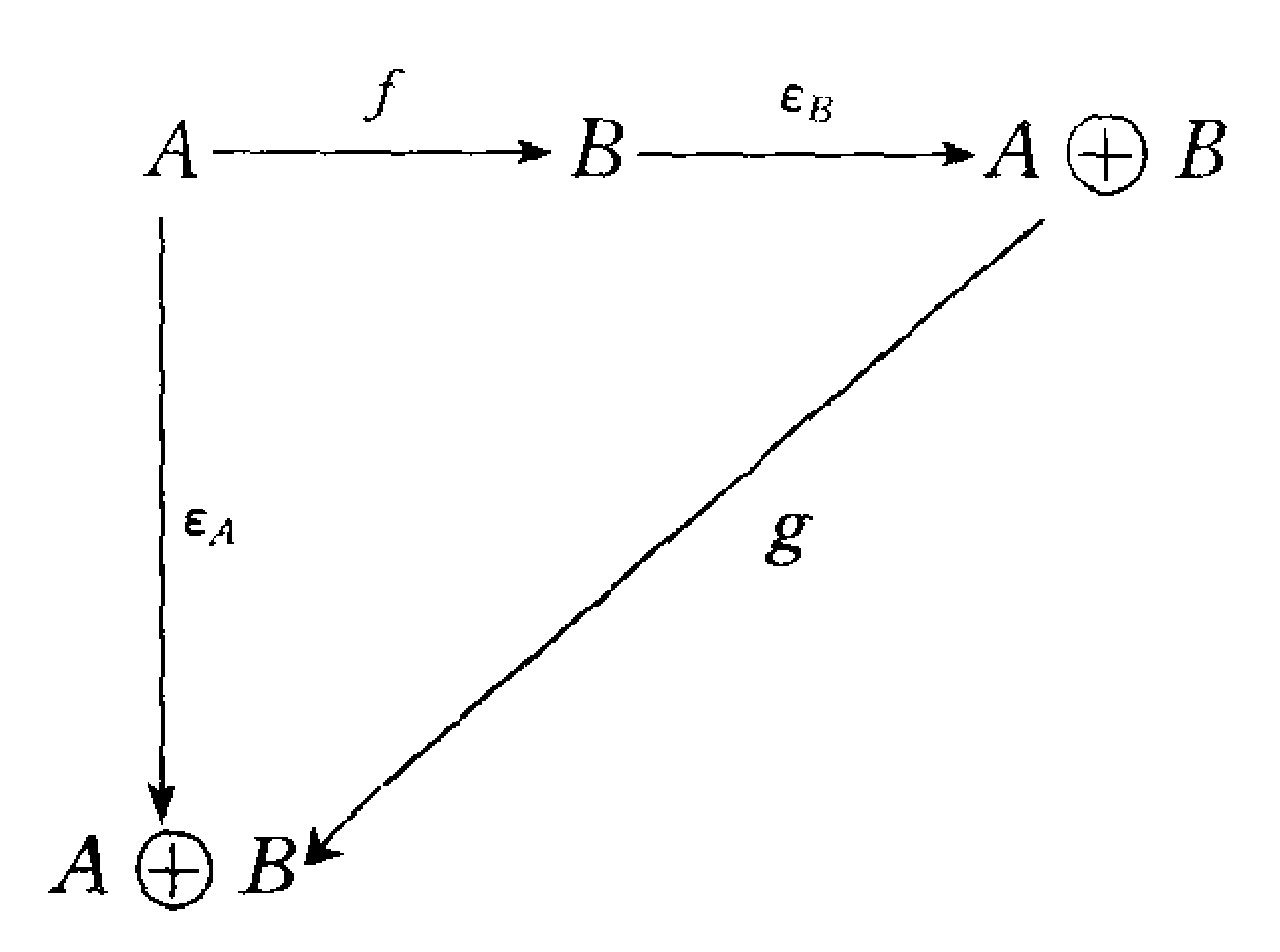
定义 7.3 设$A_i(i\in I)$是S-系，记集合

$$\left\{(a_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}A_i\mid 最多有有限个\ a_i\neq\theta_i\right\}$$

为$\bigoplus\limits_{i\in I}A_i$，这里$\theta_i$表示$A_i$中的零元. 在$\bigoplus\limits_{i\in I}A_i$上自然地定义$S$的左作用，则$\bigoplus\limits_{i\in I}A_i$构成一个$S$-系，称为$A_i(i\in I)$的直和. 当$I=\{1,\cdots,n\}$时，也记$\bigoplus\limits_{i\in I}A_i=A_1\oplus\cdots\oplus A_n$.

引理 7.4 设A,B是S-系且使得$A\oplus B$是拟内射的，则任意单同态$f:A\to B$是可收缩的.

证明 记$\varepsilon_A:A\to A\oplus B$和$\varepsilon_B:B\to A\oplus B$为自然的包含同态. 由$A\oplus B$的拟内射性可知存在同态$g:A\oplus B\to A\oplus B$，使得下图可换：



即 $g\varepsilon_B f=\varepsilon_A$. 记 $\pi_A:A\oplus B\to A$ 为自然的投射，则有 $1_A=\pi_A\varepsilon_A=\pi_A g\varepsilon_B f$. 所以 f 是可收缩的. //

推论 7.5 设 A 是 S- 系. 若 $A\oplus I(A)$ 是拟内射的，则 A 是内射的.

证明 由引理 7.4 知包含同态 $\varepsilon:A\to I(A)$ 是可收缩的，所以由命题 1.2 即得结论. //

定理 7.6 设 S 是幺半群，且其幂等元均为中心元，则以下几条是等价的：

(1) 任意 S- 系都是拟内射的；

(2) 任意 S- 系都是内射的(即 S 是完全左内射幺半群)；

(3) 对于 S 的任意左理想 L, $L\oplus S$ 是拟内射的；

(4) S 的任意左理想都可由幂等元生成.

证明 (2)⇒(1)⇒(3) 显然.

(3)⇒(4) 设 L 是 S 的左理想，则由(3) 知 $L\oplus S$ 是拟内射的. 所以由引理 7.4 知包含同态 $\varepsilon:L\to S$ 是可收缩的，即存在 S- 同态 $\alpha:S\to L$, 使得 $\alpha|_L=1$. 显然 α 是满同态. 所以 $L=\alpha(S)=S\alpha(1)$. 又 $\alpha(1)\alpha(1)=\alpha(\alpha(1)\cdot 1)=\alpha(\alpha(1))=\alpha(1)$, 即 $\alpha(1)\in E(S)$. 所以 L 可由幂等元生成.

(4)⇒(2) 设 S 的任意左理想都可由幂等元生成. 由我们的约定，S 含有零元. 利用条件“幂等元都是中心元”，和定理 6.3 的证明类似地可证任意 S- 系都是 S-Act 中的内射对象. 从而任意中心 S- 系都是 S^0-Act 中的内射对象. //

定义 7.7 S- 系 M 称为是 Noether 的，如果 M 的任意子系是

有限生成的. 幺半群S称为是左Noether的，如果${}_SS$是Noether的.

一个显然的事实是：S-系M是Noether的当且仅当M满足子系的升链条件. 特别地，幺半群S是左Noether的当且仅当S的左理想满足升链条件. 下面的定理给出了左Noether幺半群的内射性和拟内射性特征.

定理 7.8 对于幺半群S，以下几条等价：

(1) 任意内射S-系的直和仍是内射的；

(2) 任意内射S-系的直和是拟内射的；

(3) S是左Noether的.

证明 (1)⇒(2) 显然.

(2)⇒(3) 设有S的左理想升链

$$0 = I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_k \subseteq \cdots.$$

记Q_i为左S-系S/I_i的内射包，令$Q = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Q_i$. 由(2)知$Q$是拟内射的. 记$I = \bigcup I_k$，设$f_k: I \to S/I_k$是自然的同态，则$f_k(I) \subseteq Q_k$. 对任意$a \in I$，存在$t$使得对于任意$k \geqslant t$，$f_k(a) = 0$. 所以$\pi Q_i$中的元素$(f_1(a), f_2(a), \cdots, f_k(a), \cdots)$最多只有有限个$f_k(a) \neq 0$，因此$(f_1(a), f_2(a), \cdots, f_k(a), \cdots) \in Q$. 定义$S$-同态$f: I \to Q$，

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a), \cdots, f_k(a), \cdots), \quad \forall\, a \in I.$$

因为$I \subseteq S \subseteq Q_1 \subseteq Q$，而$Q$是拟内射的，所以存在$S$-同态$g: Q \to Q$，使得$g|_I = f$. 设$g(1) = q \in Q$，则对任意$x \in S$，$g(x) = xg(1) = xq$. 设$q = (q_1, \cdots, q_k, \cdots) \in Q$，则存在$t$使得对任意$k \geqslant t$，$q_k = 0$. 所以对任意$k \geqslant t$，$(xq)_k = xq_k = 0$，从而当$x \in I$时，$f(x) = g(x) = xq$的第$k$分量为0，即$f_k(x) = 0$，$k \geqslant t$. 所以$I \subseteq I_t$，从而有$I_{t+1} = I_{t+2} = \cdots = I$. 因此$S$是左Noether的.

(3)⇒(1) 设$E_i (i \in I)$是内射S-系，$E = \bigoplus_{i \in I} E_i$. 我们要证明$E$是内射的.

设Sa是循环S-系，$A \leqslant Sa$，$f: A \to E$是任意S-同态. 我们首先证明存在S-同态$g: Sa \to E$，使得$g|_A = f$.

容易证明两个内射S-系的直和仍是内射的. 利用数学归纳法

可以证明有限个内射 S- 系的直和也是内射的. 令 $L = \{s \in S \mid sa \in A\}$,则 L 是 S 的左理想. 因为 S 是左 Noether 的,所以 L 是有限生成的,从而 A 是有限生成的. 所以存在 I 的有限子集合 I_0,使得 $f(A) \subseteq \bigoplus_{i \in I_0} E_i$. 因为 $\bigoplus_{i \in I_0} E_i$ 是内射的,所以存在 S- 同态 $h: Sa \to \bigoplus_{i \in I_0} E_i$,使得 $h|_A = f$. 令 $g: Sa \to E$ 为 $g(x) = h(x), \forall x \in Sa$,则 g 即满足要求.

设 B 是任意 S- 系,$A \leqslant B$,$f: A \to E$ 是任意 S- 同态. 令

$$\mathscr{A} = \{(P, g) \mid A \leqslant P \leqslant B, g \in \mathrm{Hom}(P, E), g|_A = f\},$$

则 $\mathscr{A} \neq \varnothing$. 在 $\mathscr{A}$ 中定义如下的序:

$$(P, g) \leqslant (P', g') \Leftrightarrow P \leqslant P', \text{且 } g'|_P = g.$$

由 Zorn 引理知 $\mathscr{A}$ 中有极大元,设其为 (P_0, g_0). 下证 $P_0 = B$. 假设不然,设 $b \in B - P_0$. 显然 $P_0 \cap Sb \neq \varnothing$. 令 $h = g_0|_{P_0 \cap Sb}: P_0 \cap Sb \to E$. 由已证的结果知存在 S- 同态 $g: Sb \to E$,使得 $g|_{P_0 \cap Sb} = h$. 定义同态 $g^*: P_0 \cup Sb \to E$,

$$g^*(x) = g_0(x), \quad \forall x \in P_0,$$
$$g^*(sb) = g(sb), \quad \forall s \in S.$$

显然 g^* 的定义是可行的. 因为 $(P_0 \cup Sb, g^*) \gneqq (P_0, g_0)$,所以得到矛盾. 矛盾说明 $P_0 = B$. 所以 E 是内射 S- 系. //

关于拟内射系的直和有

定理 7.9 以下两条是等价的:

(1) 任意拟内射 S- 系的直和仍是拟内射的;

(2) S 是左 Noether 的且任意拟内射 S- 系是内射的.

证明 (1)⇒(2) 由(1)可知任意内射 S- 系的直和是拟内射的,所以由定理 7.8 即知 S 是左 Noether 的. 设 M 是拟内射 S- 系,则由(1)知 $M \oplus I(M)$ 是拟内射的,所以由推论 7.5 知 M 是内射的.

(2)⇒(1) 由定理 7.8 即得. //

§ 8　弱内射系

定义 8.1　称 S- 系 M 是弱内射的，如果 M 是${}_S S$- 内射的.

显然内射 S- 系一定是弱内射的. 设 S 是幺半群，则 S- 系${}_S S$ 是弱内射的当且仅当它是拟内射的. 令 S 是群且 $|S| \geq 2$，则${}_S S$ 是弱内射 S- 系但不是内射的.

命题 8.2　如果 S 的任意左理想都可由幂等元生成，则任意 S- 系 M 是弱内射的.

证明　设 $I = Se$ 是 S 的左理想，$e^2 = e \in S$，对于任意 S- 同态 $f: I \to M$，定义映射 $g: S \to M$ 为

$$g(s) = sf(e), \quad \forall s \in S.$$

显然 g 是 S- 同态，且 $g(se) = sef(e) = f(se)$，即 $g|_I = f$. 所以 M 是弱内射的.　　//

称 S- 系 M 是强挠自由的，如果对于任意 $a, b \in M$，任意 $s \in S$，若 $sa = sb$，则 $a = b$.

命题 8.3　设 S 是左Noether 幺半群，且任意两个左理想有非空的交. 若强挠自由 S- 系 M 的任意循环子系是弱内射的，则 M 是弱内射的.

证明　设 I 是 S 的任意左理想，则 I 是有限生成的，所以设 $I = \bigcup_{i=1}^{n} Sa_i$. 设 $f: I \to M$ 是任意 S- 同态. 记 $f(a_i) = x_i \in M$. 显然 $f|_{Sa_i}: Sa_i \to Sx_i$ 也是 S- 同态. 由 Sx_i 的弱内射性知存在 $g_i: S \to Sx_i$，使得 $g_i|_{Sa_i} = f|_{Sa_i}$. 设 $g_i(1) = y_i$，则 $g_i(s) = sy_i (s \in S)$. 特别地，$g_i(a_i) = a_i y_i = f(a_i) = x_i$. 因为 S 的任意两个左理想有非空的交，所以存在 $b_1, \cdots, b_n \in S$，使得 $b_1 a_1 = b_2 a_2 = \cdots = b_n a_n$. 因此 $b_1 a_1 y_1 = b_2 a_2 y_2 = \cdots = b_n a_n y_n$. 利用 M 的强挠自由性即得 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$. 所以对任意 $i = 1, 2, \cdots, n$，$f(a_i) = a_i y_i = a_i y_1$，故对任意 $s \in I$，$f(s) = sy_1$. 作 S- 同态 $g: S \to M$ 为 $g(s) = sy_1$，则 $g|_I =$

f. 所以 M 是弱内射的. //

下面的例子说明命题 8.3 中的条件"任意两个左理想有非空的交"不能去掉.

例 8.4 设 $T = \{a,b\}$ 是右零半群, $S = T^1$, $M = \{a,b\}$, 则 S 是左 Noether 的, 且 M 是强挠自由 S- 系. M 的循环子系有两个: $\{a\}$, $\{b\}$. 因为映射 $f: S \to \{a\}$ 是 S- 同态, 所以 $\{a\}$ 是弱内射系, 同理 $\{b\}$ 也是弱内射系. 但是 M 不是弱内射的. 这是因为对于 S- 同态 $g: T \to M: g(a) = a, g(b) = b$, 不存在 S- 同态 $h: S \to M$, 使得 $h|_T = g$. //

这个例子也说明拟内射系可以不是弱内射的. 事实上, M 是拟内射的. 这是因为: M 的子系只有三个: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$. 容易证明任意子系到 M 的任意 S- 同态都可扩张为 M 到 M 的 S- 同态.

命题 8.5 设 S 是左 Noether 幺半群, S- 系 M 不是有限生成的. 若 M 的任意真子系是弱内射的, 则 M 是弱内射的.

证明 设 I 是 S 的任意左理想, 则 I 是有限生成的, 设 $I = \bigcup_{i=1}^{n} Sa_i$. 设 $f: I \to M$ 是任意 S- 同态. 若 $M = f(I)$, 则易知 M 是有限生成的, 矛盾. 所以 $f(I) \neq M$. 由条件知 $f(I)$ 是弱内射的, 所以存在 S- 同态 $g: S \to f(I)$, 使得 $g|_I = f$. 因此 M 是弱内射的. //

例 8.4 说明, 命题 8.5 中的条件"M 不是有限生成系"不能去掉.

S 的左(右)理想 I 称为是 n- 生成的(n 是自然数), 如果 I 可由 $n-1$ 个元素生成.

命题 8.6 设 M 是拟内射左 S- 系, H 是 M 的自同态幺半群. 若 H 的任意 3- 生成左理想都可由幂等元生成, 则 H 是弱内射左 H- 系.

证明 设 A 是 H 的任意左理想, $f: A \to H$ 是任意 H- 同态. 定义映射 $\alpha: MA \to M$,

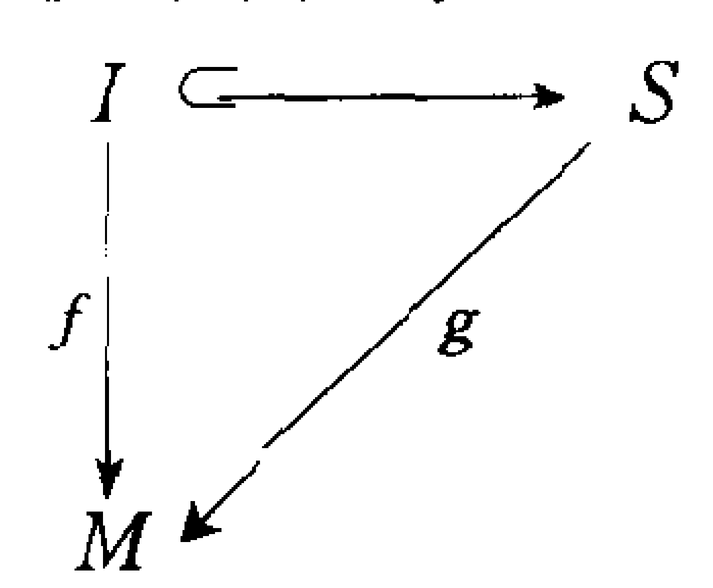
$$\alpha(ma) = mf(a), \quad \forall\, m \in M, \forall\, a \in A.$$

因为 M 是左 S- 右 H- 系, 所以 $mf(a)$ 有意义. 设 $ma = m'a'$, m, m'

$\in M, a, a' \in A$. 由条件知左理想 $Ha \cup Ha'$ 可由 H 的幂等元 e 生成，所以 $a = ae, a' = a'e$. 因此 $mf(a) = mf(ae) = m(af(e)) = maf(e) = m'a'f(e) = m'f(a'e) = m'f(a')$. 这说明 α 是映射. 对任意 $s \in S$，有 $\alpha(s(ma)) = \alpha((sm)a) = (sm)f(a) = s(mf(a)) = s\alpha(ma)$，所以 α 是 S- 同态. 因为 M 是拟内射的，所以存在 $h \in \mathrm{Hom}_S(M, M)$，使得 $h|_{MA} = \alpha$. 所以对于任意 $a \in A$，任意 $m \in M$，$mf(a) = \alpha(ma) = h(ma) = (ma)h = m(ah)$，因此 $f(a) = ah$. 这即证明了 H 是弱内射左 H- 系. //

下面考虑弱内射系的推广——α- 内射系. 设 α 是任意基数. S 的左理想 I 称为是 α- 生成的，如果 I 可由基数小于 α 的生成集生成. 显然 α- 生成是 n- 生成概念的推广.

定义 8.7 设 M 是 S- 系，α 是任意基数且 $\alpha \geqslant 2$. 称 M 是 α- 内射的，如果对于 S 的任意 α- 生成左理想 I，任意 S- 同态 $f: I \to M$，存在 S- 同态 $g: S \to M$，使得下图可换：



显然弱内射系是 α- 内射的，其中 α 是任意基数. 若 $\alpha \geqslant \beta > 1$，则任意 α- 内射系一定是 β- 内射的. 若基数 α 使得 S 的任意左理想都是 α- 生成的，则 α- 内射系即为弱内射系.

定义 8.8 称 S- 系 M 是主弱内射的，如果 M 是 2- 内射的；称 M 是弱有限内射的，如果 M 是 $\aleph_0$- 内射的.

引理 8.9 设 M 是 S- 系，α 是任意基数，$|J| < \alpha$，考虑 M 上的如下形式的方程组

$$\sum = \{s_j x = a_j \mid s_j \in S, a_j \in M, j \in J\},$$

则如下两条是等价的：

(1) $\sum$ 是 M 上的容许方程组；

(2) 对 S 的任意元素 h, k，和任意 $i, j \in J$，若 $hs_i = ks_j$，则 ha_i

$= ka_j$.

证明 (1)⇒(2) 由容许方程组的定义(§3)知存在 S-系 B,使得 $\sum$ 在 B 中有解而 M 是 B 的子系.设解为 $b \in B$.对任意 h, $k \in S$ 和任意 $i,j \in J$,若 $hs_i = ks_j$,则 $ha_i = hs_ib = ks_jb = ka_j$.即结论成立.

(2)⇒(1) 令 S_z 是由 z 生成的自由左 S-系,$B = M \dot{\cup} S_z$.设

$$H = \{(a_j, s_jz) \mid j \in J\},$$

$\lambda = \lambda(H)$ 是由 H 生成的 B 上的同余.对于 $m,n \in M$,若 $m\lambda n$,则 $m = n$,或存在 $t_1,\cdots,t_p \in S$,$c_1,d_1,\cdots,c_p,d_p \in S$,使得

$$m = t_1c_1, t_1d_1 = t_2c_2, \cdots, t_{p-1}d_{p-1} = t_pc_p, t_pd_p = n,$$

其中 $(c_i,d_i) \in H$ 或者 $(d_i,c_i) \in H$,$i = 1,\cdots,p$.由 H 的元素形式可知 p 是偶数.利用简单的数学归纳法即可证明 $m = n$.所以自然同态 $M \to B \to B/\lambda$ 是单的.因此可以把 M 看成 B/λ 的子系.对任意 $i \in J$,有

$$a_i = \overline{a_i} = \overline{s_iz} = s_i\bar{z},$$

所以 $\bar{z}$ 是 $\sum$ 在 B/λ 中的解,故 $\sum$ 是容许的. //

S-系 M 称为满足 α-Baer 准则,如果对于 S 的任意 α-生成左理想 I,任意 S-同态 $f: I \to M$,存在 $a \in M$,使得对任意 $x \in I$,$f(x) = xa$.

命题 8.10 对于 S-系 M,以下几条等价:

(1) M 上的任意容许方程组

$$\sum = \{s_jx = a_j \mid s_j \in S, a_j \in M, j \in J\}, |J| < \alpha,$$

在 M 中有解;

(2) M 满足 α-Baer 准则;

(3) M 是 α-内射的.

证明 (1)⇒(2) 设 I 是 S 的 α-生成左理想,则 $I = \cup\{St_j \mid j \in J\}$,这里 $|J| < \alpha$,$t_j \in S$.设 $f: I \to M$ 是任意 S-同态.对任意 h, $k \in S$,任意 $i,j \in J$,若 $ht_i = kt_j$,则 $hf(t_i) = kf(t_j)$.所以由引理

8.9 知 M 上的方程组

$$\sum = \{t_j x = f(t_j) \mid j \in J\}$$

是容许方程组. 由条件知 $\sum$ 在 M 中有解 a,所以对任意 $x \in I$, $f(x) = f(st_j) = sf(t_j) = st_j a = xa$,即 M 满足 α-Baer 准则.

(2)⇒(3)　显然.

(3)⇒(1)　设

$$\sum = \{s_j x = a_j \mid j \in J, s_j \in S, a_j \in M\}, |J| < \alpha$$

是 M 上的容许方程组,令 $I = \bigcup \{Ss_j \mid j \in J\}$,则 I 是 S 的 α- 生成左理想. 规定映射 $f: I \to M$,

$$f(ts_j) = ta_j, \quad \forall\, t \in S, \forall\, j \in J.$$

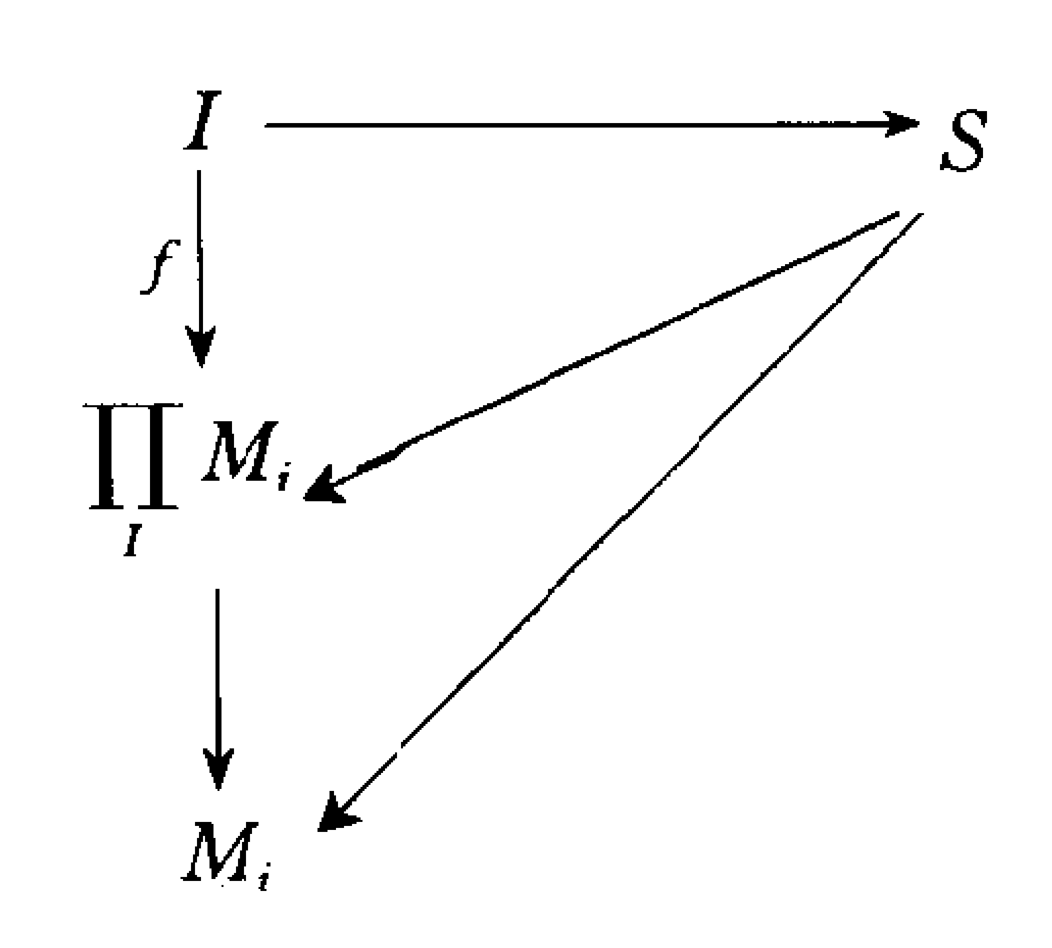
若 $ts_j = t's_i$,则由引理 8.9 知有 $ta_j = t'a_i$. 所以 f 是有定义的. 显然 f 是 S- 同态. 由 M 的 α- 内射性可知,存在 S- 同态 $g: S \to M$,使得 $g|_I = f$. 对于任意 $j \in J$, $s_j g(1) = g(s_j) = f(s_j) = a_j$,所以 $g(1)$ 是方程组 $\sum$ 在 M 中的解.　//

命题 8.11　设 $\{M_i \mid i \in I\}$ 是一簇 S- 系,

(1) 若 M_i 是 α- 内射的, $i \in I$,则 $\prod_I M_i$ 是 α- 内射的;

(2) 若 $\dot{\bigcup}_I M_i$ 是 α- 内射的,则每个 M_i 是 α- 内射的.

证明　(2) 的证明和 (1) 的证明对偶,所以我们只需证明 (1). 设 I 是 S 的 α- 生成左理想, $f: I \to \prod_I M_i$ 是任意 S- 同态. 由下面的交换图即可完成证明.



//

命题 8.12 设 S 是幺半群. 若任意内射 S- 系的余积是 3- 内射的,则 S 的任意两个左理想有非空的交.

证明 否则,存在 $a,b\in S$,使得 $Sa\cap Sb=\varnothing$. 设 Sy,Sz 分别是由 y,z 生成的自由 S- 系,显然 $Say\leqslant Sy,Sbz\leqslant Sz$. 定义映射 $f:Sa\cup Sb\to I(Say)\dot{\cup} I(Sbz)$ 如下:

$$f(sa)=say,\quad f(sb)=sbz,\quad \forall\, s\in S,$$

显然 f 是有定义的 S- 同态. 由条件知 $I(Say)\dot{\cup} I(Sbz)$ 是 3- 内射的,所以存在 S- 同态 $g:S\to I(Say)\dot{\cup} I(Sbz)$,使得 $g|_{Sa\cup Sb}=f$. 容易证明这是矛盾的. //

推论 8.13 设 S 是幺半群. 若任意 α- 内射 S- 系的余积是 α- 内射的,这里 $\alpha>2$,则 S 的任意两个左理想有非空的交. //

推论 8.13 说明当 $\alpha>2$ 时,α- 内射 S- 系的余积不一定是 α- 内射的. 但是当 $\alpha=2$ 时有

命题 8.14 设 $\{M_i|i\in J\}$ 是一簇 S- 系,则

(1) 余积 $C=\dot{\bigcup}_{i\in J}M_i$ 是主弱内射的当且仅当每个 M_i 是主弱内射的;

(2) 积 $P=\prod_{i\in J}M_i$ 是主弱内射的当且仅当每个 M_i 是主弱内射的.

证明 (1) 设 $f:Ss\to C$ 是任意 S- 同态,则 $f(s)\in M_k$,所以 $f(Ss)\subseteq M_k$. 而 M_k 是主弱内射的,所以易知 C 是主弱内射的. 反过来的证明由命题 8.11 即得.

(2) 设 P 是主弱内射的. 要证明每个 M_i 是主弱内射的. 设 $f:Ss\to M_i$ 是任意 S- 同态. 对任意 $j\in J-\{i\}$,取定 $a_j\in M_j$. 定义映射 $g:Ss\to P$,

$$g(ts)(j)=\begin{cases}f(ts), & \text{如果 } j=i,\\ tsa_j, & \text{如果 } j\neq i.\end{cases}$$

显然 g 是 S- 同态. 因为 P 是主弱内射的,所以存在 S- 同态 $h:S\to P$,使得 $h|_{Ss}=g$. 设 $p_i:P\to M_i$ 是自然的投影,则 S- 同态 $(p_ih):S$

$\to M_i$ 满足 $(p_i h)|_{Ss} = f$. 所以 M_i 是主弱内射的. //

下面的概念是余平坦模的推广.

定义 8.15 称 S-系 M 是余平坦的，如果对任意 $a \in M$，任意 $s \in S$，若 $a \notin sM$，则存在 $h,k \in S$，使得 $hs = ks$ 但 $ha \neq ka$.

命题 8.16 S-系 M 是余平坦的当且仅当 M 是主弱内射的.

证明 由引理 8.9 及命题 8.10 即得此结论. //

定理 8.17 如下条件是等价的：

(1) 所有 S-系是主弱内射的；

(2) S 的所有主左理想是主弱内射的；

(3) S 是正则幺半群.

证明 (1)⇒(2) 显然.

(2)⇒(3) 设 $s \in S$. 若 s 不是 S 的正则元，则 $s \notin sSs$. 因为 Ss 是主弱内射的，所以 Ss 是余平坦的，从而存在 $h,k \in S$，使得 $hs = ks$ 但 $hs \neq ks$. 矛盾. 所以 S 是正则的.

(3)⇒(1) 设 M 是任意 S-系，$a \in M$，$s \in S$，满足 $a \notin sM$. 由于 S 是正则的，所以存在 $s' \in S$，使得 $ss's = s = 1 \cdot s$. 但 $ss'a \neq 1 \cdot a = a$（否则 $a \in sM$）. 所以 M 是余平坦的. 由命题 8.16 即知 M 是主弱内射的. //

定理 8.18 设 S 是幺半群，α 是任意基数，则如下条件是等价的：

(1) 所有 S-系是 α-内射的；

(2) S 的任意左理想是 α-内射的；

(3) S 的任意 α-生成左理想是 α-内射的；

(4) S 是正则的，且 S 的任意 α-生成左理想是主左理想.

证明 (1)⇒(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(4) 由 α-内射的定义可知 $\alpha > 1$. 所以 S 的任意主左理想都是 α-内射的，从而是主弱内射的. 由定理 8.17 知 S 是正则的. 设 I 是任意 α-生成左理想，则 I 是 α-内射的. 所以自然包含同态 $I \to S$ 是可收缩的. 因此 I 是主左理想.

(4)⇒(1) 由定理 8.17 知所有 S-系是主弱内射的. 又因为

所有 α- 生成左理想是主理想，所以任意主弱内射 S- 系是 α- 内射的. //

推论 8.19 如下条件是等价的：

(1) 所有 S- 系是弱有限内射的；

(2) 所有 S- 系是 3- 内射的；

(3) S 的所有 3- 生成左理想是 3- 内射的；

(4) S 是正则的，且 S 的所有主左理想按照包含关系构成链.

证明 (1)⇒(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(4) 由定理 8.18 知 S 是正则的，且 S 的任意由两个元素生成的左理想是主左理想. 因此对于任意 $a,b \in S$，有 $Sa \subseteq Sb$ 或 $Sb \subseteq Sa$.

(4)⇒(1) 容易证明 S 的任意有限生成左理想是主左理想，所以弱有限内射和主弱内射是一致的. 又因为 S 是正则的，所以由定理 8.17，所有 S- 系是主弱内射的. //

推论 8.20 如下条件是等价的：

(1) 所有 S- 系是弱内射的；

(2) S 是正则的，且所有左理想均为主左理想.

以下讨论和直和有关的问题，其主要结果选自[3].

设 $\{M_i | i \in I\}$ 是一簇 S- 系，且每个 M_i 都含有零元 θ_i. 和定义 7.3 类似地可以定义 $\{M_i | i \in I\}$ 的直和 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ 为

$$\left\{ (a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \,\middle|\, \text{最多有有限个 } a_i \neq \theta_i \right\}$$

以及自然的左 S- 作用. 因为 M_i 的零元不一定是唯一的，所以这样定义的直和显然和选取的零元 θ_i 有关系. 当 θ_i 取定以后，$(\theta_i)_{i\in I}$ 就是 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ 的零元.

命题 8.21 设 $M_i (i \in I)$ 是主弱内射(弱有限内射)左 S- 系，且 M_i 具有零元 $\theta_i (i \in I)$，则 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ 是主弱内射(弱有限内射)的.

证明 设 $a \in S$，Sa 是 S 的主左理想，$f: Sa \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ 是任意 S- 同态. 显然 $f(a) \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ 有有限多个分量不等于 θ_i. 所以可以假定

$f(a) \in M_{i_1} \oplus \cdots \oplus M_{i_n}$. 容易证明两个(从而利用数学归纳法知有限个)主弱内射 S-系的直和仍为主弱内射的,所以由 $\mathrm{Im} f \leqslant M_{i_1} \oplus \cdots \oplus M_{i_n}$ 知存在 S-同态 $g: S \to M_{i_1} \oplus \cdots \oplus M_{i_n}$,使得 $g|_{Sa} = f$. 显然可以把 g 看成是从 S 到 $\bigoplus_{i \in I} M_i$ 的 S-同态. 所以 $\bigoplus_{i \in I} M_i$ 是主弱内射的. 同理可以证明 $\bigoplus_{i \in I} M_i$ 是弱有限内射的. //

定义 8.22 设 M 是 S-系. 称 M 是 P-拟内射的,如果对于 M 的任意主弱内射子系 N,任意 S-同态 $f: N \to M$,存在 S-同态 $g: M \to M$,使得 $g|_N = f$. P-拟内射 S-系简记为 PQI 系.

显然拟内射系是 PQI 系. 称 S-系 M 是完全不可约的,如果 M 的同余只有两个:泛同余 $M \times M$ 和单位同余 1_M. 显然完全不可约 S-系没有真的非零子系,所以是 PQI 系.

命题 8.23 设 M 是 S-系,$I(M)$ 是 M 的内射包,则如下条件是等价的:

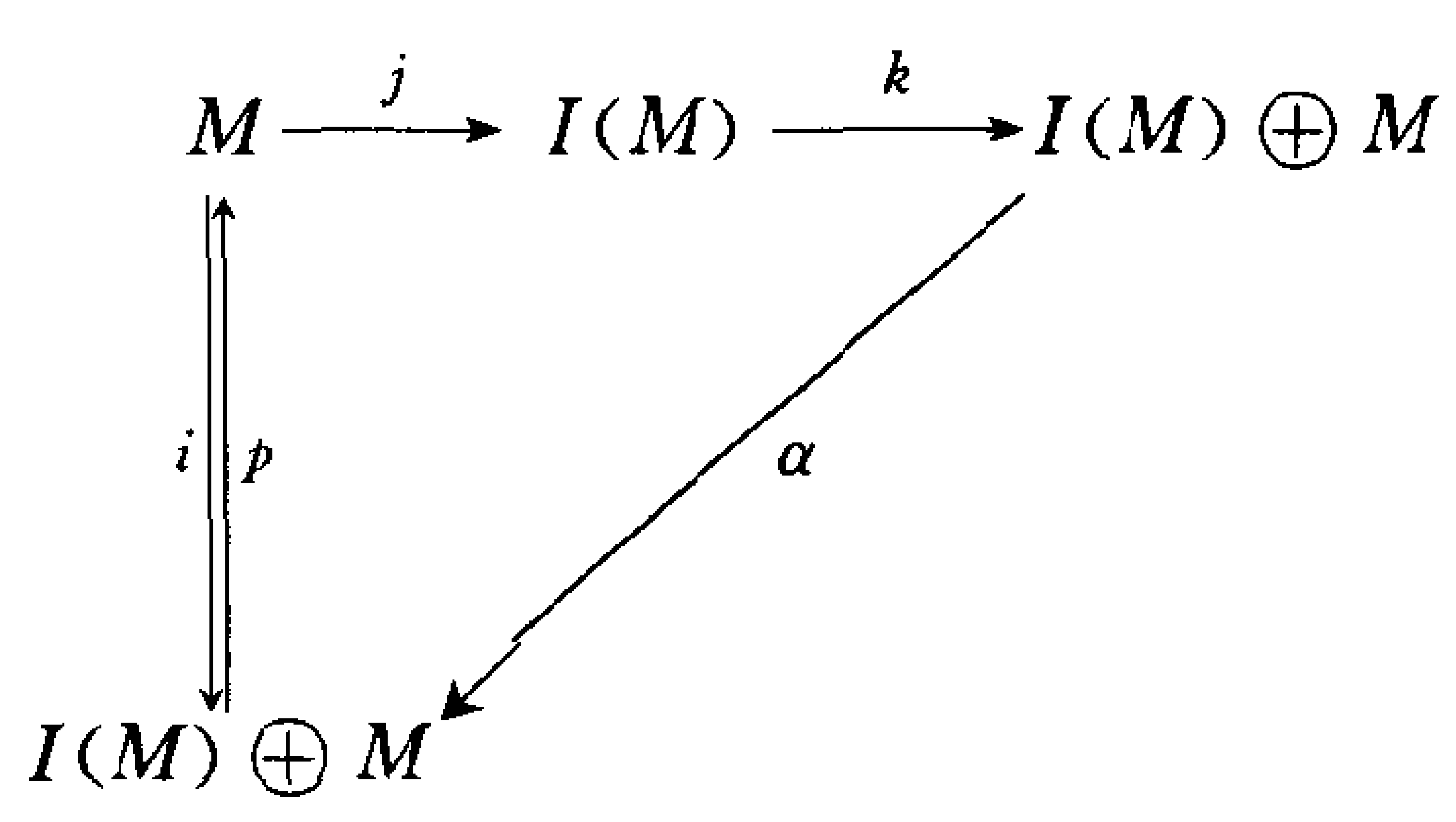
(1) M 是内射的;

(2) 自然同态 $M \to I(M)$ 是可收缩的;

(3) M 是主弱内射的且含有零元,$I(M) \oplus M$ 是 PQI 系.

证明 (1)$\Leftrightarrow$(2) 显然.

(3)$\Rightarrow$(2) 设 $i: M \to I(M) \oplus M$, $k: I(M) \to I(M) \oplus M$, $j: M \to I(M)$, $p: I(M) \oplus M \to M$ 是自然的 S-同态. 考虑下面的图:



由于 M 是主弱内射的,且 $I(M) \oplus M$ 是 PQI 的,所以存在 $\alpha: I(M) \oplus M \to I(M) \oplus M$,使得 $\alpha kj = i$. 所以 $p\alpha kj = 1_M$. 这说明 S-同态 j 是可收缩的.

(1)$\Rightarrow$(3) 因为 M 是内射的,所以 M 是主弱内射的且含有零

元. 由命题 1.7 知 $I(M) \oplus M = I(M) \times M$ 是内射 S- 系,因此是 PQI 系. //

命题 8.24 任意内射 S- 系的直和仍是内射的当且仅当 S 是左 Noether 幺半群.

证明 类似于定理 7.8 的证明(因为内射系含有零元,所以内射系的直和也含有零元 θ. 在定理 7.8 (3)⇒(1) 的证明中,若 $P_0 \cap Sb = \varnothing$,则定义 S- 同态 $g: Sb \to E$ 为 $g(sb) = \theta$). //

设 S- 系 M 含有零元. 称 M 是 $\sum$- 内射($\sum$- 拟内射)的,如果对于任意集合 I,直和 $\bigoplus_I M$ 是内射(拟内射)的. 下定理中研究的幺半群的内部特征将在定理 10.9 中给出.

定理 8.25 对于幺半群 S,以下条件等价:

(1) 任意主弱内射 S- 系是内射的;

(2) 任意主弱内射 S- 系是 $\sum$- 内射的,且含有零元;

(3) 任意主弱内射 S- 系是 $\sum$- 拟内射的,且含有零元;

(4) 任意主弱内射 S- 系是拟内射的,且含有零元;

(5) 任意主弱内射 S- 系是 PQI 系且含有零元.

证明 (1)⇒(2) 因为内射 S- 系必含有零元,所以任意主弱内射 S- 系必含有零元. 设 $\{M_i | i \in I\}$ 是内射 S- 系,则由命题 8.21 知 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ 是主弱内射的,从而由条件知是内射的. 由命题 8.24 知 S 是左 Noether 的. 所以任意主弱内射 S- 系是 $\sum$- 内射的,且含有零元.

(2)⇒(3)⇒(4)⇒(5) 显然.

(5)⇒(1) 设 M 是主弱内射系. 由条件知 M 含有零元. 作直和 $I(M) \oplus M$,这里 $I(M)$ 是 M 的内射包. 由命题 8.21 知 $I(M) \oplus M$ 是主弱内射的,因此由条件知 $I(M) \oplus M$ 是 PQI 系,从而由命题 8.23 知 M 是内射的. //

推论 8.26 设 S 是正则幺半群且含有零元,则如下条件等价:

(1) 任意 S- 系是内射的;

(2) 任意 S- 系是拟内射的;

(3) 任意 S- 系是 PQI 系.

证明 由定理 8.17 和定理 8.25 即得此结论. //

设 S 是正则幺半群,则对于 S 的任意极大左理想 K,Rees 商 $S/K = S/\lambda_K$ 是弱内射 S- 系. 这是因为:设 B 是 S 的任意左理想,$f:B \to S/K$ 是任意 S- 同态,若 $f(B \cap K) \neq \{K\}$(S- 系 S/K 的零元),则存在 $a \in B \cap K$,使得 $f(a) \notin K$. 因为 S 是正则的,所以存在 $b \in S$,使得 $a = aba$. 因此 $f(a) = f(aba) = af(ba) \in (K)S/K \leqslant K$. 矛盾. 所以 $f(B \cap K) = \{K\}$. 考虑如下两种情形:

(i) $B \cup K = K$. 此时 $f(B) = f(B \cap K) = \{K\}$. 所以 f 可以扩张为 S- 同态 $S \to S/K$.

(ii) $B \cup K = S$. 如下定义 $g:S \to S/K$,

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in B, \\ \{K\}, & x \in K. \end{cases}$$

显然 g 是有定义的,且 $g|_B = f$. 这即证明了 S/K 是弱内射的.

定理 8.27 如下条件是等价的:

(1) 所有弱内射 S- 系是内射的,且 S 是左 Noether 的;

(2) 所有弱有限内射 S- 系是内射的;

(3) 所有弱有限内射 S- 系是拟内射的且含有零元.

证明 (1)⇒(2) 因为 S 是左 Noether 幺半群,所以任意弱有限内射 S- 系是弱内射的,从而是内射的.

(2)⇒(3) 因为任意内射 S- 系必含有零元,所以任意弱有限内射 S- 系是拟内射的且含有零元.

(3)⇒(2) 设 M 是弱有限内射 S- 系,由条件知 M 含有零元. 设 $I(M)$ 是 M 的内射包,作直和 $D = I(M) \oplus M$,则 D 是弱有限内射的. 由条件即知 D 是拟内射的,从而是 PQI 系. 显然 M 还是主弱内射系. 所以由命题 8.23 即知 M 是内射的.

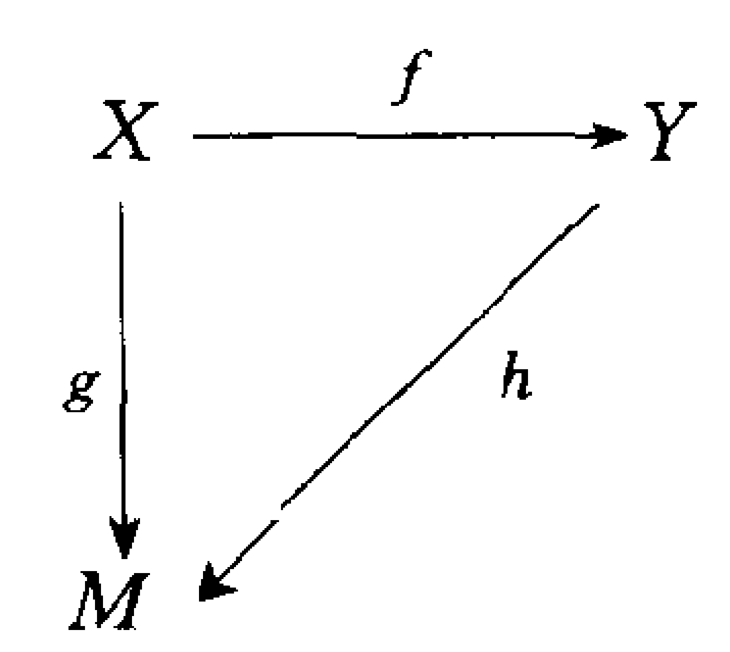
(2)⇒(1) 设 $\{M_i | i \in I\}$ 是一簇内射 S- 系. 因为任意内射 S- 系是弱有限内射的,所以由命题 8.21 知 $\bigoplus_{i \in I} M_i$ 是弱有限内射的,从而是内射的. 因此由命题 8.24 知 S 是左 Noether 的. 显然任意弱内

射 S- 系是弱有限内射的，从而是内射的. //

§ 9　有限内射系

本节的主要结果选自[3].

定义 9.1　称 S- 系 M 是有限内射的，如果对于任意有限生成 S- 系 X，任意 S- 单同态 $f:X\to Y$，任意 S- 同态 $g:X\to M$，存在 S- 同态 $h:Y\to M$，使得下图可换：



显然有限内射系是弱有限内射的，而任意内射系一定是有限内射的.

下面的定理给出了有限内射系的等价条件.

定理 9.2　设 A 是 S- 系，则如下三条等价：

(1) A 是有限内射的；

(2) 对于 A 的任意扩张系 B，和 A 的任意有限子集合 $\{a_1,\cdots,a_n\}$，存在 S- 同态 $f:B\to A$，使得 $f(a_i)=a_i, i=1,\cdots,n$；

(3) 对于 A 的任意有限子集合 $\{a_1,\cdots,a_n\}$，存在 S- 同态 $f:I(A)\to A$，使得 $f(a_i)=a_i, i=1,\cdots,n$，这里 $I(A)$ 是 A 的内射包.

证明　(1)⇒(2)　设 A' 是由 $a_1,\cdots,a_n$ 生成的子系，$\alpha:A'\to B$ 和 $\beta:A'\to A$ 是自然的包含同态. 因为 A 是有限内射的，所以存在 $f:B\to A$，使得 $f\alpha=\beta$. 因此对任意 $i=1,\cdots,n$，有

$$f(a_i)=f\alpha(a_i)=\beta(a_i)=a_i.$$

(2)⇒(3)　显然.

(3)⇒(1)　设 X 是有限生成 S- 系，$\alpha:X\to Y$ 是 S- 单同态，$\beta:X\to A$ 是 S- 同态. 记 $\tau:A\to I(A)$ 是自然的包含同态. 设 X 的生成

元为 $x_1,\cdots,x_n$. 由 $I(A)$ 的内射性知存在 S- 同态 $g:Y\to I(A)$,使得 $g\alpha=\tau\beta$. 由条件知存在 S- 同态 $h:I(A)\to A$,使得 $h(\beta(x_i))=\beta(x_i)$, $i=1,\cdots,n$. 令 $f=hg$,则 $f\alpha(x_i)=hg\alpha(x_i)=h\tau\beta(x_i)=h\beta(x_i)=\beta(x_i)$,所以 $f\alpha=\beta$,即 A 是有限内射的. //

我们知道 S- 系 A 是内射的当且仅当任意包含同态 $f:A\to B$ 是可收缩的,即存在 S- 同态 $g:B\to A$,使得 $g|_A=1$. 因此定理 9.2 给出了有限内射性的类似特征.

推论 9.3 任意有限生成的有限内射系是内射的.

证明 设 A 是有限生成的有限内射系,则由定理 9.2 知包含同态 $A\to I(A)$ 是可收缩的,所以 A 是内射系. //

定理 9.4 如下条件是等价的:

(1) 所有有限内射 S- 系是内射的;

(2) 所有有限内射 S- 系是弱内射的;

(3) 所有有限内射 S- 系是拟内射的;

(4) S 是左 Noether 幺半群.

证明 (1)⇒(2) 和(1)⇒(3) 是显然的.

(3)⇒(4) 类似于命题 8.21 可以证明有限内射 S- 系的直和是有限内射的,所以任意内射 S- 系的直和是有限内射的,从而由条件知是拟内射的. 类似于定理 7.8 的证明即知 S 是左 Noether 幺半群.

(2)⇒(4) 考察定理 7.8 的证明,我们发现 S 是左 Noether 的当且仅当任意内射 S- 系的直和是弱内射的. 所以类似于(3)⇒(4) 即可完成证明.

(4)⇒(1) 设 A 是有限内射 S- 系, Sz 是循环 S- 系, $\alpha:X\to Sz$ 是 S- 单同态, $\beta:X\to A$ 是 S- 同态. 令

$$I=\{s\in S\,|\,sz\in\alpha(X)\},$$

则 I 是 S 的左理想. 由于 S 是左 Noether 幺半群,故 I 是有限生成的,从而 X 是有限生成的. 所以由 A 的有限内射性即知存在 S- 同态 $\psi:Sz\to A$,使得 $\psi\alpha=\beta$.

设 B 是任意 S- 系, $C\leqslant B$, $f:C\to A$ 是 S- 同态. 令

$$\mathscr{A} = \{(P,g) \mid C \leqslant P \leqslant B, g \in \mathrm{Hom}(P,A), g|_C = f\},$$

则 $\mathscr{A} \neq \varnothing$. 在 $\mathscr{A}$ 中定义如下的偏序：

$$(P,g) \leqslant (P',g') \Leftrightarrow P \leqslant P', \text{且 } g'|_P = g.$$

由 Zorn 引理知 $\mathscr{A}$ 中有极大元，设其为 (P_0,g_0). 下证 $P_0 = B$. 假设不然，取 $b \in B - P_0$. 如果 $P_0 \cap Sb \neq \varnothing$，那么令 $h = g_0|_{P_0 \cap Sb}: P_0 \cap Sb \to A$. 由已证的结果知存在 S-同态 $g: Sb \to A$，使得对任意 $a \in P_0 \cap Sb$ 有 $g(a) = h(a)$. 定义 S-同态 $g^*: P_0 \cup Sb \to A$,

$$g^*(x) = g_0(x), \quad \forall\, x \in P_0,$$

$$g^*(x) = g(x), \quad \forall\, x \in Sb.$$

显然 g^* 的定义是可行的. 如果 $P_0 \cap Sb = \varnothing$，那么令 $g: Sb \to A$ 为 $g(sb) = \theta, \forall\, s \in S$，这里 θ 是 A 中的零元(容易证明任意有限内射 S-系都含有零元). 同上类似的方法可定义 S-同态 $g^*: P_0 \cup Sb \to A$. 因为

$$(P_0 \cup Sb, g^*) \gneqq (P_0,g_0),$$

所以与 (P_0,g_0) 的极大性矛盾. 矛盾说明 $P_0 = B$. 所以 A 是内射 S-系. //

定理 9.5 如下两条是等价的：

(1) 所有 S-系是有限内射的；

(2) 所有有限生成 S-系是内射的.

证明 (1)⇒(2) 由推论 9.3 即得.

(2)⇒(1) 设 X 是有限生成 S-系，$\alpha: X \to Y$ 是 S-单同态，A 是任意 S-系，$\beta: X \to A$ 是任意 S-同态. 显然 $\beta(X)$ 是有限生成的，从而是内射的，所以存在 S-同态 $\varphi: Y \to \beta(X)$，使得 $\varphi\alpha = \beta$. 因此 A 是有限内射的. //

定理 9.6 设所有 S-系都是有限内射的，则 S 是正则自内射幺半群，且其所有左理想按照集合的包含关系构成全序集.

证明 设 I 是 S 的有限生成左理想，则由 I 的有限内射性知存在 S-同态 $f: S \to I$，使得 $f|_I = 1$. 显然 $f(1) \in I$，所以 $f(1)f(1) = f(f(1)) = f(1)$. 令 $e = f(1)$，则 $e \in E(S)$. 又 $I = Ie \subseteq Se \subseteq I$，所以 $I = Se$. 即任意有限生成左理想可由幂等元生成. 所以 S 是

正则幺半群.由推论 9.3 可知 S 是内射左 S- 系.

设 $a,b\in S$,则 $Sa\cup Sb$ 可由幂等元生成,所以必有 $Sa\subseteq Sb$ 或 $Sb\subseteq Sa$. 设 I,J 是 S 的两个左理想. 若 $I\nsubseteq J$ 且 $J\nsubseteq I$,则存在 $a\in I-J,b\in J-I$. 由上可知对于 a,b 有 $Sa\subseteq Sb$ 或 $Sb\subseteq Sa$,所以 $a\in J$ 或 $b\in I$,矛盾. 所以必有 $I\subseteq J$ 或 $J\subseteq I$. //

称幺半群 S 是遗传的(半遗传的),如果 S 的任意(有限生成)左理想是投射的. 由定理 9.6 的证明可得:

命题 9.7 设所有左 S- 系是有限内射的,则 S 是半遗传幺半群. 若 S 还是左 Noether 的,则 S 是遗传幺半群. //

§10 α- 内射系

在 §8 中,作为弱内射系的推广,已经讨论过 α- 内射系,也研究过所有 S- 系都是 α- 内射系的幺半群. 本节先给出一个构造 α- 内射系的方法,然后以此为基础,利用 α- 内射性研究幺半群的同调分类. 本节主要内容选自 Gould[56].

设 α 是任意基数且 $1<\alpha\leqslant\aleph_0$,$A$ 是任意 S- 系,要构造一个 α- 内射系 $A^{[\alpha]}$,使得 $A\leqslant A^{[\alpha]}$.

对任意满足 $1\leqslant n<\alpha$ 的自然数 n,令

$$\sum\nolimits_0^n=\{((a_1,s_1),\cdots,(a_n,s_n))\in(A\times S)^n\mid ss_i=ts_j\Rightarrow sa_i=ta_j,s,t\in S,i,j\in\{1,\cdots,n\}\},$$

$$\sum\nolimits_0=\bigcup_{n<\alpha}\sum\nolimits_0^n,$$

以 $\sum_0$ 为基作自由 S- 系

$$F=\bigcup\left\{Sx_\sigma\mid\sigma\in\sum\nolimits_0\right\}.$$

对于任意 $\sigma\in\sum_0^n,\sigma=((a_1,s_1),\cdots,(a_n,s_n))$,称 (a_i,s_i) 为 σ 的第 i 分量,记为 $\sigma_i=(a_i,s_i)$. 令

$$H_0=\left\{(a_i,s_ix_\sigma)\mid\sigma\in\sum\nolimits_0^n,n<\alpha,(a_i,s_i)=\sigma_i,\right.$$

$$i \in \{1, \cdots, n\}\},$$

$$A_1 = (A \cup F)/\lambda(H_0),$$

这里 $\lambda(H_0)$ 是由 H_0 生成的 $A \cup F$ 上的最小同余.

定义映射 $f: A \to A_1$,

$$f(a) = [a], \quad \forall\, a \in A,$$

这里 $[a]$ 表示 $a \in A \cup F$ 所在的 $\lambda(H_0)$- 类. 下面证明 f 是单的.

设 $a_1, a_2 \in A$, 满足 $[a_1] = [a_2]$, 则 $a_1 = a_2$ 或存在自然数 p 使得

$$a_1 = t_1c_1, t_1d_1 = t_2c_2, \cdots, t_{p-1}d_{p-1} = t_pc_p, t_pd_p = a_2,$$

这里 $t_1, \cdots, t_p \in S$, (c_i, d_i) 或 $(d_i, c_i) \in H_0$, $i = 1, \cdots, p$. 因为 $a_1, a_2 \in A$, 所以 p 为偶数. 设 $p = 2q$. 对 q 用数学归纳法证明 $a_1 = a_2$.

设 $q = 1$, 此时有

$$a_1 = t_1c_1, t_1d_1 = t_2c_2, t_2d_2 = a_2.$$

显然 $c_1 \in A$, 所以存在 $(a_i, s_ix_\sigma) \in H_0$, 使得 $(c_1, d_1) = (a_i, s_ix_\sigma)$. 这里 $\sigma \in \sum_0^n$, $n < \alpha$. 因此 $d_1 = s_ix_\sigma$. 从 $t_1d_1 = t_2c_2$ 知存在 $j \in \{1, \cdots, n\}$, 使得 $c_2 = s_jx_\sigma$, $d_2 = a_j$, 且 $(a_j, s_jx_\sigma) = \sigma_j$. 所以 $t_1s_ix_\sigma = t_2s_jx_\sigma$, 故 $t_1s_i = t_2s_j$. 由 $\sum_0^n$ 的定义即知有 $t_1a_i = t_2a_j$. 所以 $a_1 = t_1c_1 = t_1a_i = t_2a_j = t_2d_2 = a_2$.

设 $q > 1$. 此时有

$$a_1 = t_1c_1, t_1d_1 = t_2c_2, \cdots, t_{2q}d_{2q} = a_2.$$

和上面的证明类似地可知 $a_1 = t_3c_3$. 所以有

$$a_1 = t_3c_3, t_3d_3 = t_4c_4, \cdots, t_{2q}d_{2q} = a_2.$$

由归纳假定即知 $a_1 = a_2$.

因此 f 是单同态. 可以把 $a \in A$ 等同于 $[a] \in A_1$, 从而 A 就是 A_1 的子系.

在上述构造过程中, 以 A_1 换 A, 可以构造出 A_2. 这个过程一直继续下去, 可以得到 $\sum_1, \sum_2, \cdots, F_1, F_2, \cdots, H_1, H_2, \cdots$, 从而得到 $A_1 \leqslant A_2 \leqslant \cdots$. 对于任意 i, 构造 F_i 时, 显然可以使得 F_i 的基不同于 $F_0, F_1, \cdots, F_{i-1}$ 的基. 为了方便, 记 $a \in A_n \cup F_n$ 所在的

$\lambda(H_n)$-类为$[a]_n$.

令 $A^{[\alpha]}=\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$,这里 $A_0=A$,有

定理 10.1 $A^{[\alpha]}$ 是 α-内射系.

证明 设 $I=\bigcup_{k\in K}Ss_k$ 是 S 的左理想且 $|K|<\alpha, g:I\to A^{[\alpha]}$ 是 S-同态. 对任意 $k,j\in K$,若 $ss_k=ts_j$,则有 $sg(s_k)=tg(s_j)$. 因为 K 是有限集合,所以可设 $K=\{1,\cdots,m\}$. 因为 $A_0\leqslant A_1\leqslant A_2\leqslant\cdots$,所以存在 n 使得 $g(s_1),\cdots,g(s_m)\in A_n$. 故

$$\sigma=((g(s_1),s_1),\cdots,(g(s_m),s_m))\in\sum\nolimits_n,$$

从而 x_σ 是 F_n 的基元素,所以$[x_\sigma]_n\in A_{n+1}$. 对任意 $k\in K$,有

$$g(s_k)=[g(s_k)]_n=[s_kx_\sigma]_n=s_k[x_\sigma]_n.$$

所以对任意 $s\in I$ 有 $g(s)=s[x_\sigma]_n$. 这说明 $A^{[\alpha]}$ 满足 α-Baer 准则,从而由命题 8.10 知 $A^{[\alpha]}$ 是 α-内射的. //

所以对于任意S-系A,存在A的扩张系$A^{[\alpha]}$,使得$A^{[\alpha]}$是α-内射的. 有了定理 10.1,就可以利用 α-内射性研究幺半群的同调分类问题了. 为此先证明

引理 10.2 设 A 是 S-系,$A^{[2]}$ 如定理 10.1. 若存在$b\in A_n$, $n>0$,使得 $A\subseteq Sb$,则存在 $c\in A_{n-1}$,使得 $A\subseteq Sc$.

证明 若 $b\in A_{n-1}$,则结论成立. 下设 $b\in A_n-A_{n-1}$. 由 A_n 的构造过程可知存在$u\in S,\sigma\in\sum_{n-1}$,使得$b=[ux_\sigma]_{n-1}$. 由条件知对于任意 $a\in A$, 存在 $v\in S$, 使得 $a=vb$. 所以$[a]_{n-1}=[vux_\sigma]_{n-1}$. 而在 $A_{n-1}\cup F_{n-1}$ 中 $a\neq vux_\sigma$,所以存在 $t_1,\cdots,t_p\in S$,使得

$$vux_\sigma=t_1c_1,t_1d_1=t_2c_2,\cdots,t_pd_p=a,$$

这里(c_i,d_i)或$(d_i,c_i)\in H_{n-1}$. 所以$(c_1,d_1)=(sx_\sigma,c)$,而$\sigma=(c,s)$,这是因为$\alpha=2$. 对于t_1c和a,类似于前面的证明可知$t_1c=a$. 所以 $A\subseteq Sc$,而 $c\in A_{n-1}$. //

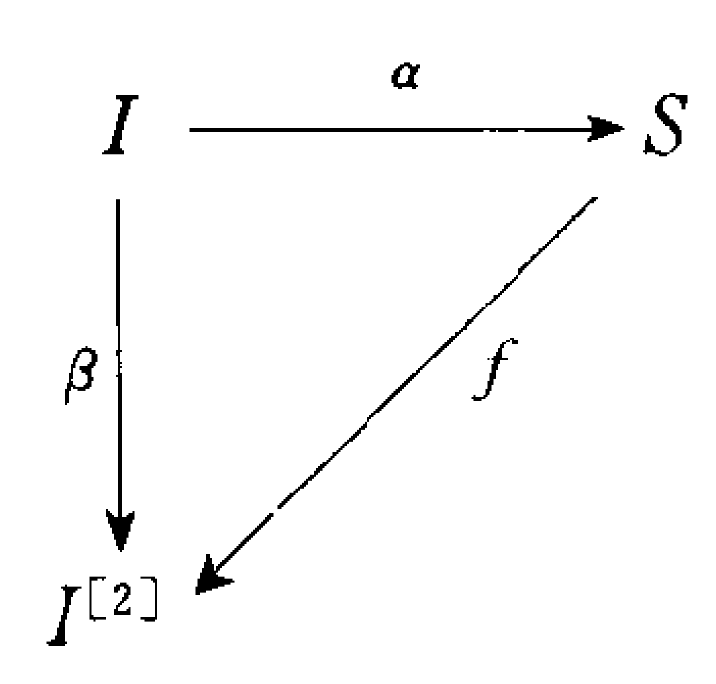
定理 10.3 设基数 $\alpha>1$,则如下条件是等价的:

(1) 所有主弱内射 S-系是 α-内射的;

(2) S 的任意 α-生成左理想是主左理想.

证明 (2)⇒(1) 若 S 的任意 α- 生成左理想是主左理想，则 α- 内射系和主弱内射系是一致的，所以结论成立.

(1)⇒(2) 设 $I=\bigcup_{k\in K}Su_k$ 是 S 的 α- 生成左理想，$|K|<\alpha$. 构造 S- 系 $I^{[2]}$，它是主弱内射的，所以是 α- 内射的. 设 $\alpha:I\to S$ 和 β: $I\to I^{[2]}$ 是自然的包含同态，则存在 S- 同态 $f:S\to I^{[2]}$，使得下图可换：



所以对任意 $k\in K$，$f(u_k)=f\alpha(u_k)=\beta(u_k)=u_k$，故 $u_k=u_kf(1)$. 因此有

$$I=\bigcup_{k\in K}Su_k=\bigcup_{k\in K}Su_kf(1)\subseteq Sf(1).$$

而 $f(1)\in I^{[2]}$，所以存在 n，使得 $f(1)\in I_n$. 若 $n=0$，则 $f(1)\in I$，故 $I=Sf(1)$. 若 $n>0$，则由引理 10.2 知存在 $c\in I_{n-1}$，使得 $I\subseteq Sc$. 若 $n=1$，则 $c\in I_0=I$，所以 $I=Sc$. 若 $n>1$，则利用引理 10.2 继续上述过程. 总之可以证明 I 是主左理想. //

推论 10.4 如下条件是等价的：

(1) 所有主弱内射 S- 系是弱内射的；

(2) S 是主左理想幺半群，即 S 的任意左理想都是主左理想.

证明 在定理 10.3 中令 $\alpha=|S|$ 即可. //

推论 10.5 设基数 α 满足 $2<\alpha\leqslant\aleph_0$，则如下条件是等价的：

(1) 所有主弱内射 S- 系是弱有限内射的；

(2) 所有主弱内射 S- 系是 α- 内射的；

(3) 所有主弱内射 S- 系是 3- 内射的；

(4) S 的任意 3- 生成左理想是主左理想；

(5) S 的任意有限生成左理想是主左理想.

证明 (1)⇒(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(4)　由定理 10.3 即得.

(4)⇒(5)　设 $a,b\in S$，则 $Sa\cup Sb$ 是 3- 生成左理想，从而是主左理想，因此必有 $Sa\subseteq Sb$ 或 $Sb\subseteq Sa$. 由此即可得知任意有限生成左理想是主左理想.

(5)⇒(1)　由定理 10.3 即得结论. //

引理 10.6　设 A 是 S- 系，$A^{[\aleph_0]}$ 是定理 10.1 中构造的 α- 内射 S- 系. 如果 A 包含在 A_n 的某个有限生成子系中，那么 A 包含在 A_{n-1} 的有限生成子系中.

证明　设 $b_1,\cdots,b_m\in A_n$ 使得 $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}Sb_i$. 如果 b_i 都在 A_{n-1} 中，则结论自然成立. 设 $b_1,\cdots,b_r\in A_n-A_{n-1},b_{r+1},\cdots,b_m\in A_{n-1}$. 因为 $A_n=(A_{n-1}\cup F_{n-1})/\lambda(H_{n-1})$，所以

$$b_i=[u_ix_{\sigma_i}]_{n-1},\quad 1\leqslant i\leqslant r,$$

这里 $\{x_\sigma|\sigma\in\sum_{n-1}\}$ 是 F_{n-1} 的基，$\sigma_1,\cdots,\sigma_n\in\sum_{n-1},u_1,\cdots,u_r\in S$. 设对任意 $i\in\{1,\cdots,r\},\sigma_i\in\sum_{n-1}^{p_i}$，且

$$\sigma_i=((c_{i1},s_{i1}),\cdots,(c_{ip_i},s_{ip_i})).$$

设 $a\in A$，且 $a\in Sb_i,i\in\{1,\cdots,r\}$，则存在 $v\in S$，使得 $a=vb_i$. 所以 $a=[a]_{n-1}=[vu_ix_{\sigma_i}]_{n-1}$. 显然 $a\neq vu_ix_{\sigma_i}$，所以存在 $t_1,\cdots,t_q\in S$，使得

$$vu_ix_{\sigma_i}=t_1c_1,t_1d_1=t_2c_2,\cdots,t_qd_q=a,$$

其中 (c_i,d_i) 或 $(d_i,c_i)\in H_{n-1}$. 所以存在 $j\in\{1,\cdots,p_i\}$，使得

$$c_1=s_{ij}x_{\sigma_i},\quad d_1=c_{ij}.$$

和定理 10.1 前面的证明类似地可证 $t_1c_{ij}=a$. 所以

$$A\subseteq\Big(\bigcup_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\1\leqslant j\leqslant p_i}}Sc_{ij}\Big)\cup\Big(\bigcup_{r<k\leqslant m}Sb_k\Big),$$

即 A 包含在 A_{n-1} 的有限生成子系中. //

定理 10.7　设基数 $\alpha\geqslant\aleph_0$，则以下条件是等价的：

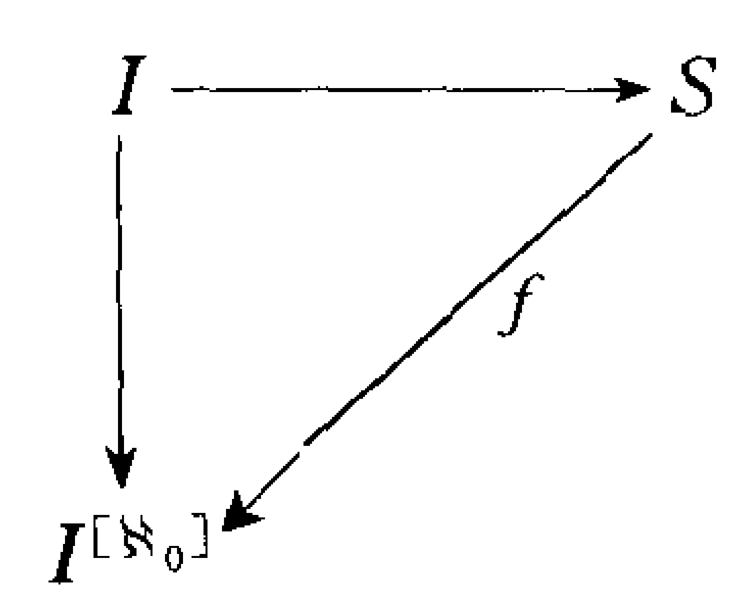
(1) 所有弱有限内射 S- 系是 α- 内射的；

(2) S 的任意 α- 生成左理想是有限生成的.

证明　(2)⇒(1)　因为 S 的任意 α- 生成左理想是有限生成

的，所以弱有限内射和 α- 内射是一致的概念，故结论成立.

(1)⇒(2)　设 I 是 S 的 α- 生成左理想. 考虑如下的图：



由 $I^{[\aleph_0]}$ 的 α- 内射性可知存在 S- 同态 $f:S\to I^{[\aleph_0]}$ 使得上图可换. 对任意 $r\in I$，有

$$r=f(r)=rf(1).$$

所以 $I\subseteq Sf(1)$. 如果 $f(1)\in I$，则 $I=Sf(1)$，所以 I 是有限生成的. 设 $f(1)\in I_n-I_{n-1}$，则 $I\subseteq Sf(1)\subseteq I_n$，即 I 包含在 I_n 的有限生成子系中，所以由引理 10.6 知 I 包含在 I_{n-1} 的有限生成子系中，如果 $n>1$，则还可以利用引理 10.6. 最后可得 I 包含在 I 的有限生成子系中，所以 I 是有限生成的.　//

推论 10.8　设基数 β 满足 $|S|\geqslant\beta\geqslant\aleph_1$，则如下条件是等价的：

(1) 所有弱有限内射 S- 系是弱内射的；

(2) 所有弱有限内射 S- 系是 β- 内射的；

(3) 所有弱有限内射 S- 系是 $\aleph_1$- 内射的；

(4) S 的任意可数生成左理想是有限生成的；

(5) S 是左 Noether 幺半群.

证明　(1)⇒(2)⇒(3)　显然.

(3)⇒(4)　由定理 10.7 即得.

(4)⇒(5)　设 I 是 S 的左理想. 若 I 不是有限生成的，则存在 S 的左理想严格升链

$$Sa_1<Sa_1\cup Sa_2<Sa_1\cup Sa_2\cup Sa_3<\cdots,$$

这里 $a_1,a_2,\cdots\in I$. 令 $J=\bigcup_{i=1}^{\infty}Sa_i$，则 J 是 S 的可数生成左理想，所以由条件知 J 是有限生成的，即 $J=\bigcup_{j=1}^{m}Sb_j$，$b_1,\cdots,b_m\in J$. 由此容

易证明存在 n，使得 $J = \bigcup_{i=1}^{n} Sa_i$. 矛盾. 因此 I 是有限生成左理想，即 S 是左 Noether 幺半群.

(5)⇒(1)　由定理 10.7 即得结论. //

定理 8.17 刻画了所有 S- 系是主弱内射系的幺半群. 定理 8.25 给出了所有主弱内射 S- 系是内射系的幺半群的一些等价条件. 有了定理 10.1 中关于 $A^{[\alpha]}$ 的构造，就可以刻画所有主弱内射系是内射系的幺半群. 为此先引入下列记号：

设 A 是左 S- 系，$a \in A$，定义

$$\mathrm{ann}(a) = \{(u,v) \in S \times S \mid ua = va\},$$

显然 $\mathrm{ann}(a)$ 是 S 的左同余，称为元素 a 的左零化子同余.

设 λ 是 S 上的左同余，定义

$$\mathrm{Ann}(\lambda) = \{s \in S \mid (u,v) \in \lambda \Rightarrow us = vs\},$$

则 $\mathrm{Ann}(\lambda) = \varnothing$，或 $\mathrm{Ann}(\lambda)$ 是 S 的右理想. 当 $\mathrm{Ann}(\lambda) \neq \varnothing$ 时，称其为 λ 的右零化子理想.

设 λ, ρ 是 S 上的左同余，$t \in S$. 定义

$$\mathrm{Ann}(\lambda,t,\rho) = \{s \in S \mid \text{如果}(u,v) \in \lambda \text{ 且 } us \neq vs, \text{则存在 } h,k \in S, \text{使得 } us = ht, h\rho k, kt = vs\} \cup \mathrm{Ann}(\lambda).$$

设 $s,t \in S$. s 和 t 的 n- 连接是指满足如下条件的 n 元组 $P = (p_1,\cdots,p_n)$，$Q = (q_1,\cdots,q_n)$，$R = (r_1,\cdots,r_n) \in S^n$：

$$\begin{aligned} sp_1 &= r_1q_1 \\ r_1p_2 &= r_2q_2 \\ &\cdots\cdots \\ r_{n-1}p_n &= r_nq_n \\ r_n &= t. \end{aligned}$$

定理 10.9　对于幺半群 S，以下两条等价：

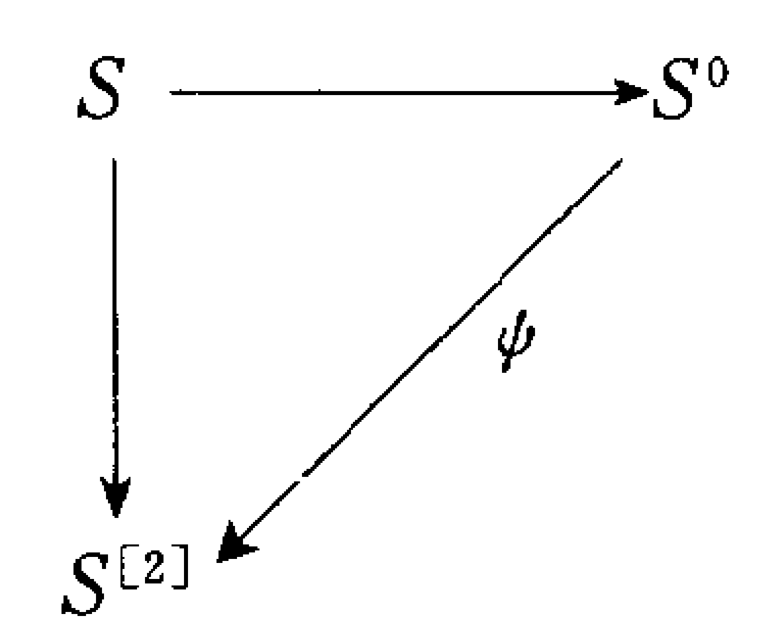
(1) 所有主弱内射 S- 系是内射的；

(2) S 是主左理想幺半群，含有右零元，且满足如下的条件 (CI)：

(**CI**)　对 S 的任意左同余 λ，任意 $s\in S$，存在 $t,u\in S$，以及 S 上的左同余 $\lambda_0=\lambda,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，使得存在 s 和 t 的 n- 连接 $P=(p_1,\cdots,p_n)$，$Q=(q_1,\cdots,q_n)$，$R=(r_1,\cdots,r_n)$ 满足 $\mathrm{ann}(q_i)\subseteq\lambda_i$，$p_i\in\mathrm{Ann}(\lambda_{i-1},q_i,\lambda_i)(1\leqslant i\leqslant n)$，$tus\lambda s$，$\lambda_n=\{(h,k)\mid hus\lambda kus\}$.

证明　(1)⇒(2)　设所有主弱内射 S- 系是内射的，则由推论 10.4 知 S 是主左理想幺半群.

对于 S- 系 S，构造主弱内射 S- 系 $S^{[2]}$. 由条件知 $S^{[2]}$ 是内射的，所以存在 S- 同态 ψ，使得下图可换：



对于任意 $s\in S$，$\psi(0)=\psi(s0)=s\psi(0)$，所以 $\psi(0)$ 是 $S^{[2]}$ 中的右零元. 设 $\psi(0)\in S_n$. 若 $n=0$，则 $\psi(0)$ 就是 S 中的右零元. 设 $n\geqslant 1$. 不妨假定 $\psi(0)\in S_n-S_{n-1}$. 因为 $S_n=(S_{n-1}\cup F_{n-1})/\lambda(H_{n-1})$，所以 $\psi(0)=[tx_\sigma]_{n-1}$，这里 $\{x_\sigma\mid\sigma\in\sum_{n-1}\}$ 是 F_{n-1} 的自由基，$\sigma\in\sum_{n-1}$，$t\in S$. 设 $\sigma=(a,u)$，$u\in S$，$a\in S_{n-1}$. 设 $t\in Su$，则存在 $v\in S$，使得 $t=vu$. 所以 $\psi(0)=[tx_\sigma]_{n-1}=[vux_\sigma]_{n-1}$. 因为 $(a,ux_\sigma)\in H_{n-1}$，所以 $\psi(0)=[va]_{n-1}\in S_{n-1}$. 矛盾. 所以 $t\notin Su$.

对于任意 $s\in S$，由 $\psi(0)=s\psi(0)$ 可知有

$$[stx_\sigma]_{n-1}=[tx_\sigma]_{n-1}.$$

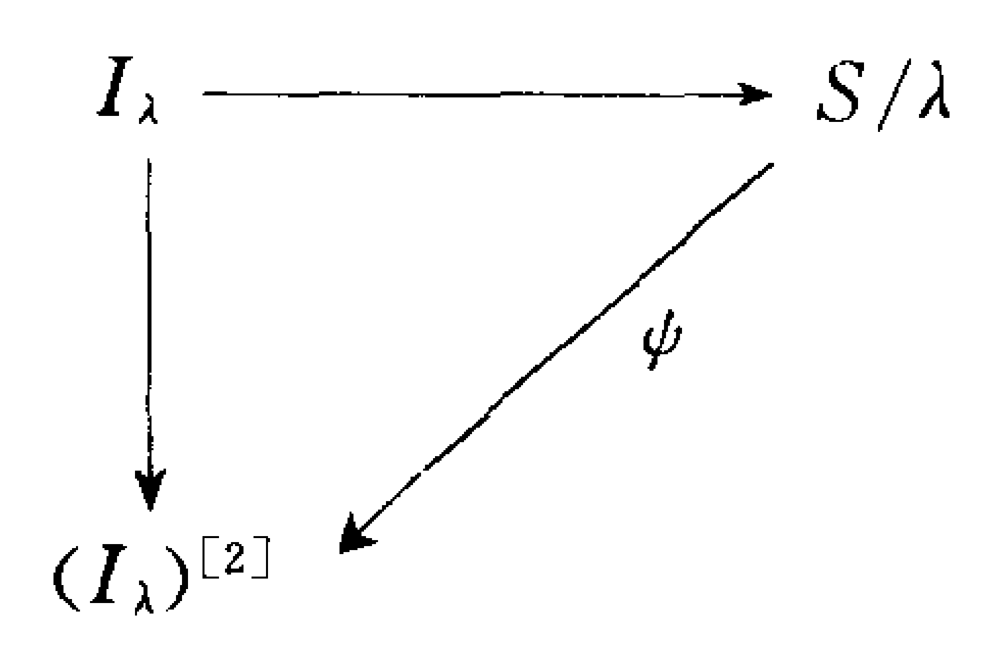
所以存在 $t_1,\cdots,t_p\in S$，使得

$$stx_\sigma=t_1b_1,t_1d_1=t_2b_2,\cdots,t_pd_p=tx_\sigma,$$

这里 $(b_i,d_i)\in H_{n-1}$ 或 $(d_i,b_i)\in H_{n-1}$，$i=1,\cdots,p$，或者 $stx_\sigma=tx_\sigma$. 由 $t_pd_p=tx_\sigma$ 可知 $d_p=ux_\sigma$，所以 $t_pux_\sigma=tx_\sigma$，故 $t=t_pu\in Su$，矛盾. 所以有 $stx_\sigma=tx_\sigma$，故 $t=st$. 这说明 t 是 S 的右零元.

设 λ 是 S 的任意左同余，$I=Ss$ 是 S 的主左理想，则 $I_\lambda=\{a\lambda\mid a\in I\}$ 是 S/λ 的 S- 子系. 构造主弱内射 S- 系 $(I_\lambda)^{[2]}$，由条件知 $(I_\lambda)^{[2]}$

是内射的，所以存在 S- 同态 $\psi: S/\lambda \to (I_\lambda)^{[2]}$，使得下图可换：



对任意$(h,k) \in \lambda$，有

$$h\psi(1\lambda) = \psi(h\lambda) = \psi(k\lambda) = k\psi(1\lambda).$$

又显然有

$$s\lambda = \psi(s\lambda) = \psi(s(1\lambda)) = s\psi(1\lambda).$$

设 $\psi(1\lambda) \in I_\lambda$，则存在 $u' \in I$，使得 $\psi(1\lambda) = u'\lambda$. 设 $u' = us$，则 $s\lambda = sus\lambda$，即 $sus\lambda s$，又对任意$(h,k) \in \lambda$，有 $hus\lambda kus$. 令 $n = 1$，$p_1 = q_1 = 1$，$r_1 = s$，$t = s$，则容易验证条件(CI) 成立.

设 $\psi(1\lambda) \in (I_\lambda)_n$，$n \geqslant 1$. 因为

$$(I_\lambda)_n = ((I_\lambda)_{n-1} \cup F_{n-1})/\lambda(H_{n-1}),$$

所以 $\psi(1\lambda) = [p_1 x_\sigma]_{n-1}$ 或 $\psi(1\lambda) = [m]_{n-1}$，这里 $\sigma \in \sum_{n-1}$，$p_1 \in S$，$m \in (I_\lambda)_{n-1}$. 因为$(m,1) \in \sum_{n-1}$，所以若令 $\tau = (m,1)$，则有 $(m,x_\tau) \in H_{n-1}$，因此

$$\psi(1\lambda) = [m]_{n-1} = [x_\tau]_{n-1}.$$

所以我们总可以假定 $\psi(1\lambda) = [p_1 x_\sigma]_{n-1}$，这里 $\left\{x_\sigma \mid \sigma \in \sum_{n-1}\right\}$是 F_{n-1} 的自由基.

设 $h,k \in S$，使得 $h\lambda k$，则 $h\psi(1\lambda) = k\psi(1\lambda)$，因此有

$$[hp_1 x_\sigma]_{n-1} = [kp_1 x_\sigma]_{n-1}.$$

所以 $hp_1 x_\sigma = kp_1 x_\sigma$，或者存在 $t_1,\cdots,t_l \in S$，使得

$$hp_1 x_\sigma = t_1 c_1, t_1 d_1 = t_2 c_2, \cdots, t_l d_l = kp_1 x_\sigma,$$

这里$(c_i,d_i) \in H_{n-1}$ 或$(d_i,c_i) \in H_{n-1}$，$i = 1,\cdots,l$.

设 $\sigma = (m_1,q_1) \in \sum_{n-1}$，这里 $q_1 \in S$，$m_1 \in (I_\lambda)_{n-1}$，则有 $hp_1 = kp_1$ 或

$$hp_1 = t_1 q_1, t_1 m_1 \lambda(H_{n-1}) t_l m_1, t_l q_1 = kp_1.$$

由 $t_1m_1, t_lm_1 \in (I_\lambda)_{n-1}$ 且 $t_1m_1\lambda(H_{n-1})t_lm_1$ 即可得 $t_1m_1 = t_lm_1$. 定义 S 上的左同余 λ_1 为

$$\lambda_1 = \mathrm{ann}(m_1).$$

因此有 $hp_1 = kp_1$ 或

$$hp_1 = t_1q_1, t_1\lambda_1t_l, t_lq_1 = kp_1,$$

所以 $p_1 \in \mathrm{Ann}(\lambda_0, q_1, \lambda_1)$，这里 $\lambda_0 = \lambda$. 如果 $(h,k) \in \mathrm{ann}(q_1)$，则 $hq_1 = kq_1$，由于 $m_1 \in (I_\lambda)_{n-1}$，所以易知 $hm_1 = km_1$. 因此有 $(h,k) \in \mathrm{ann}(m_1) = \lambda_1$. 所以 $\mathrm{ann}(q_1) \subseteq \lambda_1$.

因为

$$[s\lambda]_{n-1} = s\lambda = s\psi(1\lambda) = [sp_1x_\sigma]_{n-1},$$

而且 $s\lambda \neq sp_1x_\sigma$，所以存在 $r_1, \cdots, r_m \in S$，使得

$$sp_1x_\sigma = r_1c_1, r_1d_1 = r_2c_2, \cdots, r_md_m = s\lambda,$$

这里 (c_i, d_i) 或 $(d_i, c_i) \in H_{n-1}, i = 1, \cdots, m$. 由此即得

$$sp_1 = r_1q_1, r_1m_1 = s\lambda.$$

设 $m_1 = [p_2y_\tau]_{n-2}$ 或 $m_1 = [m]_{n-2}$，这里 $m \in (I_\lambda)_{n-2}, p_2 \in S$, $\tau \in \sum_{n-2}$, $\{y_\tau | \tau \in \sum_{n-2}\}$ 是 F_{n-2} 的自由基. 和前面的讨论类似地可知可以假定 m_1 具有形式

$$m_1 = [p_2y_\tau]_{n-2}.$$

设 $\tau = (m_2, q_2) \in \sum_{n-2}$，这里 $m_2 \in (I_\lambda)_{n-2}, q_2 \in S$. 定义

$$\lambda_2 = \mathrm{ann}(m_2),$$

则 λ_2 是 S 上的左同余.

设 $h\lambda_1k$，则 $hm_1 = km_1$，即 $[hp_2y_\tau]_{n-2} = [kp_2y_\tau]_{n-2}$. 所以类似于前面的讨论可以证明 $hp_2 = kp_2$ 或者存在 $t, t' \in S$ 使得

$$hp_2 = tq_2, t\lambda_2t', t'q_2 = kp_2.$$

因此有 $p_2 \in \mathrm{Ann}(\lambda_1, q_2, \lambda_2)$. 由于 $(m_2, q_2) = \tau \in \sum_{n-2}$，所以类似于前面的证明可知有 $\mathrm{ann}(q_2) \subseteq \lambda_2$. 再由 $[s\lambda]_{n-2} = [r_1p_2y_\tau]_{n-2}$ 以及 $s\lambda \neq r_1p_2y_\tau$ 可得

$$r_1p_2 = r_2q_2, r_2m_2 = s\lambda,$$

这里 $r_2 \in S$.

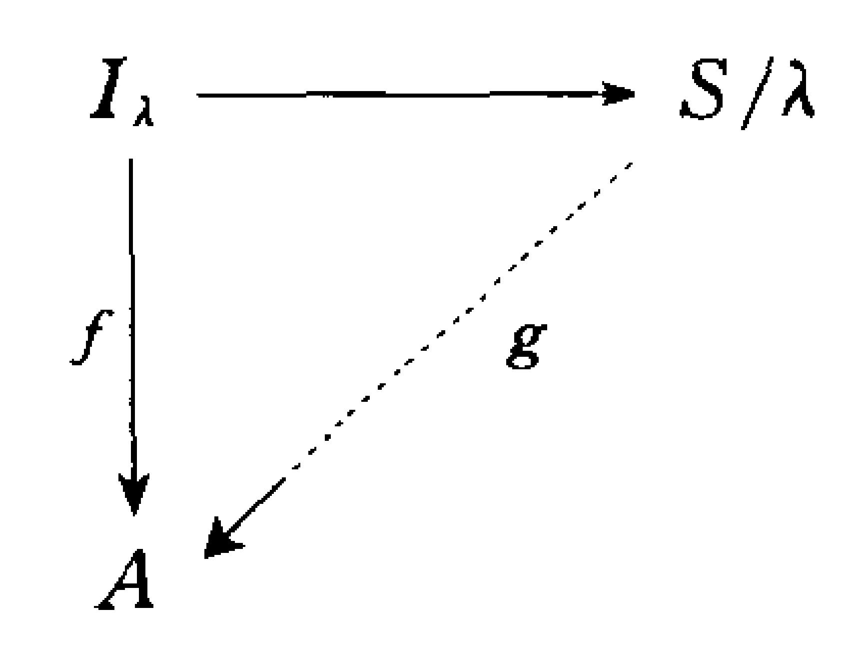
继续上述过程，可知存在元素 $p_i,q_i,r_i\in S,m_i\in(I_\lambda)_{i-1}(1\leqslant i\leqslant n)$ 满足

$$sp_1=r_1q_1,$$
$$r_ip_{i+1}=r_{i+1}q_{i+1},\quad 1\leqslant i\leqslant n-1.$$

定义 $\lambda_0=\lambda,\lambda_i=\mathrm{ann}(m_i)$，则有 $\mathrm{ann}(q_i)\subseteq\lambda_i,p_i\in\mathrm{Ann}(\lambda_{i-1},q_i,\lambda_i)(1\leqslant i\leqslant n)$，且 $r_nm_n=s\lambda$，这里 $m_n\in I_\lambda$. 因此存在 $u\in S$ 使得 $m_n=us\lambda$. 所以 $s\lambda=r_n(us\lambda)=(r_nus)\lambda$，即 $s\lambda r_nus$. 又显然有 $(h,k)\in\lambda_n\Leftrightarrow hm_n=km_n\Leftrightarrow hus\lambda=kus\lambda\Leftrightarrow hus\lambda kus$.

这就证明了 S 满足条件(CI).

(2)⇒(1) 设 S 是含有右零元的主左理想幺半群，且满足条件(CI). 设 A 是任意主弱内射 S-系. 我们首先证明对于 S 的任意主左理想 $I=Ss$，任意 S-同态 $f:I_\lambda\to A$，存在 S-同态 $g:S/\lambda\to A$，使得下图可换：



这里 λ 是 S 上的任意左同余.

由题设条件知存在自然数 n，元素 $u,p_i,q_i,r_i\in S$，以及 S 上的左同余 $\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 满足条件(CI).

定义映射 $f_n:Sq_n\to A$，

$$f_n(tq_n)=f(tus\lambda),\quad\forall\, t\in S.$$

设 $tq_n=t'q_n$，则 $(t,t')\in\mathrm{ann}(q_n)\subseteq\lambda_n$. 而由条件知 $\lambda_n=\{(h,k)\mid hus\lambda kus\}$，所以 $tus\lambda t'us$，因此 $f(tus\lambda)=f(t'us\lambda)$，即 f_n 是有定义的. 显然 f_n 还是 S-同态. 因为 A 是主弱内射的，所以存在 S-同态 $\overline{f}_n:S\to A$，使得 $\overline{f}_n|_{Sq_n}=f_n$. 如下定义映射 $\alpha_n:S/\lambda_{n-1}\to A$，

$$\alpha_n(t\lambda_{n-1})=\overline{f}_n(tp_n),\quad\forall\, t\in S,$$

设 $t\lambda_{n-1}t'$，因为 $p_n\in\mathrm{Ann}(\lambda_{n-1},q_n,\lambda_n)$，所以有

(a) $tp_n = t'p_n$

或者

(b) $tp_n = vq_n$, $v\lambda_n v'$, $v'q_n = t'p_n$,

这里 $v, v' \in S$. 如果(a)成立,则 $\overline{f_n}(tp_n) = \overline{f_n}(t'p_n)$. 如果(b)成立,则由 λ_n 的定义可知 $vus\lambda v'us$,因此

$$\begin{aligned}\alpha_n(t\lambda_{n-1}) &= \overline{f_n}(tp_n) = \overline{f_n}(vq_n) = f_n(vq_n) \\ &= f(vus\lambda) = f(v'us\lambda) = f_n(v'q_n) \\ &= \overline{f_n}(v'q_n) = \overline{f_n}(t'p_n) = \alpha_n(t\lambda_{n-1}),\end{aligned}$$

所以 α_n 是有定义的. 显然 α_n 是 S-同态.

定义映射 $f_{n-1}: Sq_{n-1} \to A$,

$$f_{n-1}(tq_{n-1}) = \alpha_n(t\lambda_{n-1}), \quad \forall\, t \in S.$$

设 $tq_{n-1} = t'q_{n-1}$,则 $(t,t') \in \mathrm{ann}(q_{n-1}) \subseteq \lambda_{n-1}$,所以 f_{n-1} 是有定义的 S-同态. 由于 A 是主弱内射的,所以存在 S-同态 $\overline{f_{n-1}}: S \to A$,使得 $\overline{f_{n-1}}|_{Sq_{n-1}} = f_{n-1}$.

定义映射 $\alpha_{n-1}: S/\lambda_{n-2} \to A$,

$$\alpha_{n-1}(t\lambda_{n-2}) = \overline{f_{n-1}}(tp_{n-1}), \quad \forall\, t \in S.$$

设 $t\lambda_{n-2} = t'\lambda_{n-2}$,则 $t\lambda_{n-2}t'$. 所以有 $tp_{n-1} = t'p_{n-1}$ 或者存在 $v, v' \in S$,使得

$$tp_{n-1} = vq_{n-1}, v\lambda_{n-1}v', v'q_{n-1} = t'p_{n-1}.$$

如果 $tp_{n-1} = t'p_{n-1}$,则 $\overline{f_{n-1}}(tp_{n-1}) = \overline{f_{n-1}}(t'p_{n-1})$. 否则有

$$\begin{aligned}\alpha_{n-1}(t\lambda_{n-2}) &= \overline{f_{n-1}}(tp_{n-1}) = \overline{f_{n-1}}(vq_{n-1}) = f_{n-1}(vq_{n-1}) \\ &= \alpha_n(v\lambda_{n-1}) = \alpha_n(v'\lambda_{n-1}) = f_{n-1}(v'q_{n-1}) \\ &= \overline{f_{n-1}}(v'q_{n-1}) = \overline{f_{n-1}}(t'p_{n-1}) = \alpha_{n-1}(t'\lambda_{n-2}).\end{aligned}$$

这说明 α_{n-1} 是有定义的 S-同态.

继续上述过程,可得到 S-同态 $f_i: Sq_i \to A$, $\overline{f_i}: S \to A$, $\alpha_i: S/\lambda_{i-1} \to A (1 \leqslant i \leqslant n)$,使得

$$f_n(tq_n) = f(tus\lambda), \quad \forall\, t \in S,$$

$$f_i(tq_i) = \alpha_{i+1}(t\lambda_i), \quad \forall\, t \in S, 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

$$\overline{f_i}|_{Sq_i} = f_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$\alpha_i(t\lambda_{i-1}) = \overline{f}_i(tp_i), \quad \forall\, t \in S, 1 \leqslant i \leqslant n.$$

所以可令 $g = \alpha_1 : S/\lambda_0 = S/\lambda \to A$. 下面证明 g 是 f 的扩张. 事实上,

$$\begin{aligned} g(s\lambda) &= \alpha_1(s\lambda) = \alpha_1(s\lambda_0) = \overline{f}_1(sp_1) = \overline{f}_1(r_1q_1) \\ &= f_1(r_1q_1) = \alpha_2(r_1\lambda_1) = \overline{f}_2(r_1p_2) = \overline{f}_2(r_2q_2) \\ &= f_2(r_2q_2) = \alpha_3(r_2\lambda_2) = \cdots = \alpha_n(r_{n-1}\lambda_{n-1}) \\ &= \overline{f}_n(r_{n-1}p_n) = \overline{f}_n(r_nq_n) = f_n(r_nq_n) \\ &= f(r_nus\lambda) = f(tus\lambda) = f(s\lambda), \end{aligned}$$

所以对任意 $t \in S, ts \in I, g(ts\lambda) = tg(s\lambda) = tf(s\lambda) = f(ts\lambda)$, 因此 $g|_{I_\lambda} = f$.

设 M 是任意 S- 系, $N \leqslant M, \varphi: N \to A$ 是 S- 同态. 在集合

$$\mathscr{D} = \{(N', \varphi') \mid N \leqslant N' \leqslant M, \\ \varphi' \in \mathrm{Hom}_S(N', A) \text{ 且 } \varphi'|_N = \varphi\}$$

上定义偏序

$$(N', \varphi') \leqslant (N'', \varphi'') \Leftrightarrow N' \leqslant N'', \varphi''|_{N'} = \varphi'.$$

由 Zorn 引理知 $\mathscr{D}$ 中有极大元, 设其为 (P, θ), 下证 $P = M$. 反设 $P \neq M$, 则存在 $m \in M - P$. 令 $I = \{s \in S \mid sm \in P\}$.

设 $I = \varnothing$, 则 $Sm \cap P = \varnothing$. 定义映射 $\alpha: Sm \cup P \to A$,

$$\alpha(sm) = s_0a, \quad \forall\, s \in S,$$
$$\alpha(p) = \theta(p), \quad \forall\, p \in P,$$

这里 s_0 是 S 的右零元, a 是 A 中任意固定的元. 显然 $\alpha(tsm) = s_0a = ts_0a = t\alpha(sm)$, 所以 α 是 S- 同态且 $\alpha|_P = \theta$, 故 $(P, \theta) \lneqq (Sm \cup P, \alpha)$. 和 (P, θ) 的极大性矛盾.

设 $I \neq \varnothing$. 由条件知 I 是主左理想, 故不妨设 $I = Ss$. 在 S 上定义左同余 λ:

$$h\lambda k \Leftrightarrow hm = km,$$

即 $\lambda = \mathrm{ann}(m)$. 定义映射 $\psi: I_\lambda \to A$,

$$\psi(ts\lambda) = \theta(tsm), \quad \forall\, t \in S.$$

显然 ψ 是有定义的 S- 同态. 所以由已证的结果知存在 S- 同态 μ:

$S/\lambda \to A$,使得 $\mu|_{I_\lambda} = \psi$. 定义映射 $\alpha: Sm \cup P \to A$,

$$\alpha(tm) = \mu(t\lambda), \quad \forall\, t \in S,$$

$$\alpha(p) = \theta(p), \quad \forall\, p \in P.$$

如果 $tm = t'm$,则 $t\lambda t'$,故 $\mu(t\lambda) = \mu(t'\lambda)$. 如果 $tm = p \in P$,则 $t \in I$,所以存在 $t' \in S$,使得 $t = t's$. 因此

$$\alpha(tm) = \mu(t\lambda) = \mu(t's\lambda) = \psi(t's\lambda)$$
$$= \theta(t'sm) = \theta(tm) = \theta(p) = \alpha(p).$$

所以 α 是有定义的,且是 S- 同态. 但是 $(P,\theta) \lneqq (Sm \cup P, \alpha)$,矛盾.

上述矛盾说明只能有 $P = M$. 所以 A 是内射的. 这就证明了任意主弱内射 S- 系是内射的. //

引理 10.10 设 Ss 是 S 的主左理想,λ 是 S 上的左同余. 设 n 是自然数,且存在 S 的元素 u, p_i, q_i, r_i 以及 S 上的左同余 $\lambda_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 满足条件(CI). 若 $q_1, \cdots, q_n$ 都是正则元,则存在 S 的元素 x 满足下述条件:任意 $h, k \in S$, $h\lambda k \Rightarrow hxus\lambda kxus$;任意 $t \in S$, $ts\lambda tsxus$.

证明 记 $I = Ss$. 对任意 $i \in \{1, \cdots, n\}$,设 $q_i = q_i q_i' q_i$. 先证明对任意 $h, k \in S$,

$$h\lambda_{i-1}k \Rightarrow hp_iq_i'\lambda_i kp_iq_i'.$$

因为 $q_iq_i'q_i = q_i$,所以 $(q_iq_i', 1) \in \mathrm{ann}(q_i)$,故 $q_iq_i'\lambda_i 1$. 因为 $p_i \in \mathrm{Ann}(\lambda_{i-1}, q_i, \lambda_i)$,所以有 $hp_i = kp_i$,或者存在 $h', k' \in S$,使得

$$hp_i = h'q_i, h'\lambda_i k', k'q_i = kp_i.$$

若 $hp_i = kp_i$,则 $hp_iq_i' = kp_iq_i'$,当然有 $hp_iq_i'\lambda_i kp_iq_i'$. 若后一种情形出现,则有

$$hp_iq_i' = h'q_iq_i'\lambda_i h'\lambda_i k'\lambda_i k'q_iq_i' = kp_iq_i'.$$

因此,对于任意 $h, k \in S$,若 $h\lambda k$,则由上述结果知有 $hx\lambda_n kx$,这里 $x = p_1q_1'p_2q_2'\cdots p_nq_n'$,从而有 $hxus\lambda kxus$.

显然 $s\lambda_0 s$,所以由上述结果知有 $sp_1q_1'\lambda_1 sp_1q_1'$. 而 $sp_1 = r_1q_1$,所以有 $r_1q_1q_1'\lambda_1 sp_1q_1'$. 又由于 $q_1q_1'\lambda_1 1$,所以有 $r_1\lambda_1 r_1q_1q_1'\lambda_1 sp_1q_1'$. 因此 $r_1p_2q_2'\lambda_2 sp_1q_1'p_2q_2'$. 再由 $r_1p_2 = r_2q_2$ 可得 $r_2q_2q_2'\lambda_2 sp_1q_1'p_2q_2'$. 利用 $q_2q_2'\lambda_2 1$ 即得

$$r_2\lambda_2 sp_1q_1'p_2q_2'.$$

继续上述过程，即得 $r_n\lambda_n sp_1q_1'p_2q_2'\cdots p_nq_n' = sx$，所以由 λ_n 的定义即知有 $r_nus\lambda sxus$. 再由 $r_n = t$ 以及 $s\lambda tus$ 即得 $s\lambda sxus$. 所以结论成立. //

由定理10.9及引理10.10可以导出推论3.11的结论，即 S 是完全左内射幺半群当且仅当 S 中含有右零元，且对于 S 的任意左理想 I 和任意左同余 λ，存在 $y\in I$，使得对于任意 $t\in I$，$ty\lambda t$，且对任意 $h,k\in S$，$h\lambda k\Rightarrow hy\lambda ky$. 其证明过程如下：

设 S 是完全左内射幺半群，则所有主弱内射 S-系是内射的. 因此 S 含有右零元，且所有左理想都是主左理想，S 满足条件(CI). 又显然所有左 S-系都是主弱内射的，从而 S 是正则幺半群.

设 I 是 S 的任意左理想，λ 是 S 的任意左同余，则存在 $s\in S$，使得 $I=Ss$. 由引理10.10知存在 $x\in S$，使得对任意 $h,k\in S$，$h\lambda k\Rightarrow hxus\lambda kxus$；且对任意 $t\in I$，$t\lambda txus$. 令 $y=xus$，则 $y\in I$. 结论显然成立.

反过来，容易证明 S 是主左理想幺半群. 类似于定理10.9的证明可知 S 满足条件(CI). 所以由定理10.9知所有主弱内射 S-系是内射的. 易知 S 是正则幺半群，所以所有左 S-系是主弱内射的. 由此即得所有 S-系是内射的，即 S 是完全左内射幺半群. //

下面给出例子说明存在幺半群 S，其上的所有主弱内射 S-系是内射的，但 S 不是完全左内射的.

例 10.11 设 S 是由元素 a 生成的无限循环幺半群，则所有主弱内射 S^0-系是内射的，但 S^0 不是完全左内射的.

证明 S^0 中的正则元只有两个：0和 $1=a^0$，所以 S^0 不是正则幺半群，从而不是完全左内射幺半群.

显然 S^0 是交换的主理想幺半群，且没有零因子.

设 $s\in S^0$，λ 是 S^0 上的左同余. 如果 $s=0$，则取 $n=1$，令 $p_1=q_1=u=1$，$r_1=0$，显然有 $sp_1=r_1q_1$，$r_1us=0$，从而 $s\lambda r_1us$. 若 $(h,k)\in \mathrm{ann}(q_1)$，则 $h=k$，所以 $\mathrm{ann}(q_1)$ 包含在 S 的任意同余中. 令 $\lambda_1=\{(h,k)\,|\,hus\lambda kus\}$. 因为 $s=0$，所以 $\lambda_1=S^0\times S^0$. 如果 $h,k\in S^0$ 使得 $h\lambda k$，则 $h1=h1$，$h\lambda_1k$，$k1=k1$，所以 $1\in \mathrm{Ann}(\lambda,1,\lambda_1)$.

因此下面假定 $s\neq 0$. 设 $\lambda=1_{S^0}$,则可取 $n=1,p_1=r_1=u=1,q_1=s,\lambda_1=\{(h,k)\mid hs\lambda ks\}$. 显然 $\lambda_1=\{(h,k)\mid hs=ks\}=\{(h,k)\mid h=k\}=1_{S^0},sp_1=r_1q_1,s\lambda r_1us$. 又 $\operatorname{ann}(q_1)=\operatorname{ann}(s)=1_{S^0}$,所以 $\operatorname{ann}(q_1)\subseteq\lambda_1$. 因为 $\lambda=1_{S^0}$,所以有 $1\in\operatorname{Ann}(\lambda,s,\lambda_1)$.

下面我们假定 $\lambda\neq 1_{S^0}$. 此时存在 $t,z\in S^0$,使得 $t\neq z$,但 $t\lambda z$. 不妨设 S^0t 是具有上述性质的元素 t 所生成的主理想中的极大者. 显然 $t\neq 0$(否则 $\lambda=1_{S^0}$). 如果 $z=0$,则 $t\lambda 0$,因此 $0\lambda t^2$,所以 $t^2\lambda t$. 显然 $t^2=t$ 的充要条件是 $t=1$. 如果 $t=1$,则 $1\lambda 0$,所以对任意 $b\in S^0$,有 $b\lambda 0$. 因此 $\lambda=S^0\times S^0$. 此时令 $n=1,p_1=q_1=r_1=u=0$, $\lambda_1=S^0\times S^0$,则容易验证条件(CI) 成立.

因此以下假定 $s\neq 0,\lambda\neq 1_{S^0},\lambda\neq S^0\times S^0$,且存在非零元素 t, $z\in S$,使得 $t\neq z$,但 $t\lambda z$,而 S^0t 是具有上述性质的元素 t 所生成的主理想中的极大者.

因为 S^0 是主理想幺半群,所以或者 $S^0s\subseteq S^0t$,或者 $S^0t\subseteq S^0s$. 设 $S^0t\subseteq S^0s$. 令 $n=1,p_1=r_1=u=1,q_1=s$,则显然有 $sp_1=r_1q_1$, $s\lambda r_1us$. 令 $\lambda_1=\{(h,k)\mid hs\lambda ks\}$,则 $\operatorname{ann}(q_1)=\operatorname{ann}(s)=1_{S^0}$,所以 $\operatorname{ann}(q_1)\subseteq\lambda_1$. 设 $v,v'\in S^0$,使得 $v\lambda v'$. 如果 $v=v'$,则 $v1=v'1$. 如果 $v\neq v'$,则 $v,v'\in S^0t$(利用 S^0t 的极大性以及 S^0 是主理想幺半群). 所以 $v,v'\in S^0s$. 故存在 $h,k\in S^0$,使得 $v=hs,v'=ks$. 因此由 $hs\lambda ks$ 即得 $(h,k)\in\lambda_1$. 所以 $1\in\operatorname{Ann}(\lambda,s,\lambda_1)$. 即条件(CI) 满足.

设 $S^0s\subseteq S^0t$. 显然存在自然数 c,d,e,使得

$$t=a^c,z=a^d,d=c+e,e>0.$$

由 $t\lambda a^d=ta^e$ 易知 $t\lambda a^{c+me}$,这里 m 是任意自然数. 可以选取 $w\in S$,使得 $t\lambda w$,且 $S^0w\subseteq S^0s\subseteq S^0t$.

设 $y,k\in S$,使得 $s=yt,w=ks$,则 $s\lambda yw$ 且 $yw=yks$. 令 $n=2,u=1,p_1=1,q_1=t,r_1=y,p_2=w,q_2=s,r_2=yk,\lambda_1=\{(h,h')\mid ht\lambda h't\},\lambda_2=\{(h,h')\mid hs\lambda h's\}$,则有

$$sp_1=s=yt=r_1q_1,$$
$$r_1p_2=yw=yks=r_2q_2,$$
$$r_2us=yks=yw\lambda s.$$

由于 $q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$，所以 $\mathrm{ann}(q_1) \subseteq \lambda_1, \mathrm{ann}(q_2) \subseteq \lambda_2$.

设 $v, v' \in S^0$，使得 $v \neq v'$ 但 $v\lambda v'$，则存在 $h, h' \in S^0$，使得 $v = ht, v' = h't$. 所以由 $ht\lambda h't$ 可得 $(h, h') \in \lambda_1$. 因此 $1 \in \mathrm{Ann}(\lambda, t, \lambda_1)$ 即 $p_1 \in \mathrm{Ann}(\lambda_0, q_1, \lambda_1)$.

设 $v, v' \in S^0$，使得 $v\lambda_1 v'$，则 $vt\lambda v't$. 由于 $S^0 w \subseteq S^0 t$，所以有 $vw\lambda v'w$. 因为 $vw = vks, v'w = v'ks$，所以有 $vks\lambda v'ks$，因此 $vk\lambda_2 v'k$. 这说明 $w \in \mathrm{Ann}(\lambda_1, s, \lambda_2)$，即 $p_2 \in \mathrm{Ann}(\lambda_1, q_2, \lambda_2)$.

总之，S^0 满足条件(CI). 所以由定理 10.9 知所有主弱内射 S-系是内射的. //

§11 可除性

本节讨论主弱内射系的推广 —— 可除 S-系，其主要结果选自[55].

定义 11.1 设 A 是 S-系. 称 A 是可除的，如果对于 S 的任意右可消元 s，有 $sA = A$.

定理 11.2 任意主弱内射系是可除的.

证明 设 A 是主弱内射系，s 是 S 的任意右可消元，要证明 $sA = A$. 为此，任取 $a \in A$，考虑方程 $sx = a$. 设 $h, k \in S$，使得 $hs = ks$，则由 s 的右可消性知 $h = k$，所以 $ha = ka$. 这说明方程 $sx = a$ 是容许的. 因为 A 是主弱内射的，所以由命题 8.10 知方程 $sx = a$ 在 A 中有解，即存在 $b \in A$，使得 $sb = a$. 由 a 的任意性即知 $sA = A$. //

下面的定理 11.4 将说明可除性不必是主弱内射的.

定义 11.3 设 S 是幺半群，$s \in S$. 称 s 是几乎正则的，如果存在 $r, r_1, \cdots, r_m, s_1, \cdots, s_m \in S$ 和 S 的右可消元 $c_1, \cdots, c_m \in S$，使得

$$s = s_1 r s,$$

$$s_1 c_1 = s_2 r_1, s_2 c_2 = s_3 r_2, \cdots, s_m c_m = s r_m.$$

若 S 中的所有元素都是几乎正则的，则称 S 是几乎正则幺半群.

设 $s \in S$ 是正则元，则存在 $s' \in S$，使得 $s = ss's$. 令 $s_1 = s, r = s', c_1 = 1, r_1 = 1$，则 $s = s_1 rs, s_1 c_1 = sr_1$. 所以正则元是几乎正则的，从而正则幺半群是几乎正则的. 设 $s \in S$ 是右可消元. 令 $c_1 = s, r = s_1 = r_1 = 1$，则 $s = s_1 rs, s_1 c_1 = sr_1$，所以右可消元也是几乎正则元，从而右可消幺半群就是几乎正则幺半群.

定理 11.4 如下两条是等价的：

(1) 所有可除 S- 系是主弱内射的；

(2) S 是几乎正则的.

证明 (1)⇒(2) 记 C 为 S 的所有右可消元构成的集合. 设 A 是任意 S- 系，规定

$$\sum\nolimits_0 = A \times C,$$

以 $\sum_0$ 为自由基作自由左 S- 系 $F_0 = \bigcup_{\sigma \in \sum_0} Sx_\sigma$. 再定义

$$K_0 = \left\{(a, cx_\sigma) \mid \sigma = (a, c) \in \sum\nolimits_0\right\},$$

$$A_1 = (A \cup F_0)/\lambda(K_0).$$

显然 A_1 是左 S- 系. 设 $a_1, a_2 \in A$，使得在 A_1 中有 $[a_1] = [a_2]$，则 $a_1 = a_2$ 或存在 $t_1, \cdots, t_n \in S$，使得

$$a_1 = t_1 b_1, t_1 d_1 = t_2 b_2, \cdots, t_n d_n = a_2,$$

这里 (b_i, d_i) 或 $(d_i, b_i) \in K_0, i = 1, \cdots, n$. 由 K_0 的特点可知 n 一定是偶数. 下面用数学归纳法证明 $a_1 = a_2$.

设 $n = 2$. 此时有

$$a_1 = t_1 b_1, t_1 d_1 = t_2 b_2, t_2 d_2 = a_2.$$

显然 $b_1 \in A$，所以 $d_1 = cx_\sigma$，其中 $\sigma = (b_1, c) \in \sum_0$. 因此 $b_2 = cx_\sigma$, $d_2 = b_1$. 从 $t_1 cx_\sigma = t_2 cx_\sigma$ 可得 $t_1 c = t_2 c$. 又 c 是右可消元，所以 $t_1 = t_2$. 因此有

$$a_1 = t_1 b_1 = t_2 b_1 = t_2 d_2 = a_2.$$

设 $n > 2$. 和上面的证法类似地可以证明 $a_1 = t_3 b_3$. 所以有

$$a_1 = t_3 b_3, t_3 d_3 = t_4 b_4, \cdots, t_n d_n = a_2.$$

由归纳假定即知有 $a_1 = a_2$.

因此，自然同态 $f: A \to A_1: a \to [a]$ 就把 A 同构地嵌入到 A_1 中. 如果把 a 和 $[a]$ 等同起来，则可以把 A 看成是 A_1 的 S-子系.

用类似的方法可以构造 $\sum_1, \sum_2, \cdots, F_1, F_2, \cdots, K_1, K_2, \cdots$，以及 S-系 $A_1 \leqslant A_2 \leqslant \cdots$. 记 $A_0 = A$，令

$$\overline{A} = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i,$$

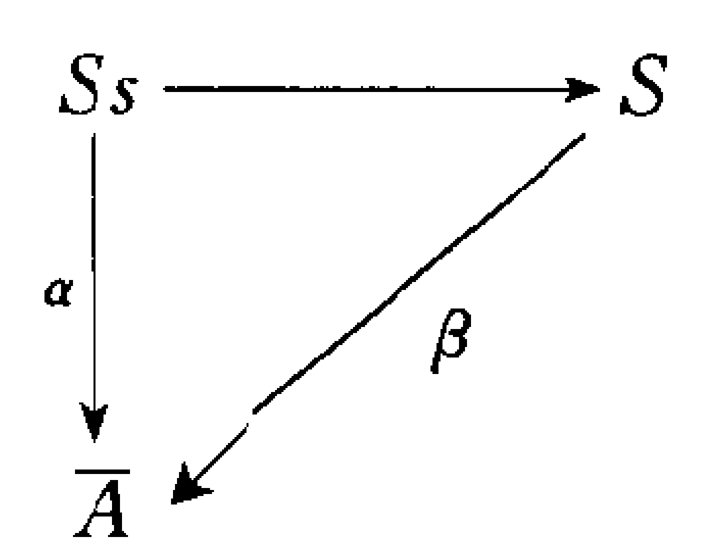
下面证明 $\overline{A}$ 是可除系.

为了方便，记 $A_n \cup F_n$ 中的元素 a 所在的 $\lambda(K_n)$-类为 $[a]_n$. 设 $c \in C, \bar{a} \in \overline{A}$，则存在 n，使得 $\bar{a} \in A_n$. 所以 $\sigma = (\bar{a}, c) \in \sum_n$，从而 $(\bar{a}, cx_\sigma) \in K_n$，因此在 A_{n+1} 中有

$$\bar{a} = [\bar{a}]_n = [cx_\sigma]_n = c[x_\sigma]_n.$$

而 $[x_\sigma]_n \in A_{n+1}$，故 $c\overline{A} = \overline{A}$. 这即证明了 $\overline{A}$ 是可除的.

设 $s \in S$. 令 $A = Ss$，则 $\overline{A}$ 是可除 S-系，所以是主弱内射的. 因此对于自然的包含同态 $\alpha: Ss \to \overline{A}$，存在 S-同态 $\beta: S \to \overline{A}$，使得下图可换：



所以 $s = \alpha(s) = \beta(s) = s\beta(1)$. 设 $\beta(1) \in A_n$. 如果 $n = 0$，则 $\beta(1) \in Ss$，故 s 是正则元，因此是几乎正则的. 下设 $n \geqslant 1$.

因为 $A_n = (A_{n-1} \cup F_{n-1})/\lambda(K_{n-1})$，所以 $\beta(1) = [m_{n-1}]_{n-1}$，或者 $\beta(1) = [r_n x_\sigma]_{n-1}$，这里 $m_{n-1} \in A_{n-1}, \sigma = (a_{n-1}, c_n) \in \sum_{n-1}$，$a_{n-1} \in A_{n-1}, r_n \in S$. 因为 $(m_{n-1}, 1) \in A_{n-1} \times C = \sum_{n-1}$，所以 $(m_{n-1}, x_\tau) \in K_{n-1}$，因此 $[m_{n-1}]_{n-1} = [x_\tau]_{n-1}$，这里 $\tau = (m_{n-1}, 1)$. 故有

$$\beta(1) = [m_{n-1}]_{n-1} = [x_\tau]_{n-1}.$$

所以总可以假定 $\beta(1) = [r_n x_\sigma]_{n-1}$. 因此

$$[s]_{n-1} = s = s\beta(1) = [sr_n x_\sigma]_{n-1},$$

即$(sr_n x_\sigma, s) \in \lambda(K_{n-1})$. 所以存在$t_1, \cdots, t_p \in S$，使得

$$sr_n x_\sigma = t_1 b_1, t_1 d_1 = t_2 b_2, \cdots, t_p d_p = s,$$

其中$(b_i, d_i) \in K_{n-1}$或$(d_i, b_i) \in K_{n-1}$. 显然$b_1 = c_n x_\sigma, d_1 = a_{n-1}$. 所以$sr_n = t_1 c_n$. 和前面的证明类似地可知$t_1 d_1 = s$.

如果$n = 1$，则$A_{n-1} = A_0 = Ss$. 所以存在$r \in S$，使得$a_{n-1} = rs$. 故有

$$s = t_1 rs, t_1 c_n = sr_n,$$

即s是弱正则元. 设$n \geqslant 2$，则$a_{n-1} \in A_{n-1} = (A_{n-2} \cup F_{n-2})/\lambda(K_{n-2})$. 同上，可以假设$a_{n-1} = [r_{n-1} x_{\sigma_1}]_{n-2}$，其中$r_{n-1} \in S$，$\sigma_1 = (a_{n-2}, c_{n-1}) \in \sum_{n-2}$. 所以有

$$[s]_{n-2} = s = t_1 a_{n-1} = [t_1 r_{n-1} x_{\sigma_1}]_{n-2}.$$

故$(t_1 r_{n-1} x_{\sigma_1}, s) \in \lambda(K_{n-2})$. 因此存在$u_1, \cdots, u_q \in S$，使得

$$t_1 r_{n-1} x_{\sigma_1} = u_1 b_1, u_1 d_1 = u_2 b_2, \cdots, u_q d_q = s,$$

其中$(b_i, d_i) \in K_{n-2}$或$(d_i, b_i) \in K_{n-2}, i = 1, \cdots, q$. 显然$b_1 = c_{n-1} x_{\sigma_1}, d_1 = a_{n-2}$. 所以$t_1 r_{n-1} = u_1 c_{n-1}, s = u_1 d_1 = u_1 a_{n-2}$.

如果$n = 2$，则$s = u_1 r_1 s$，这里$r_1 \in S$. 所以有

$$s = u_1 r_1 s, u_1 c_{n-1} = t_1 r_{n-1}, t_1 c_n = sr_n,$$

即s是弱正则元.

如果$n \geqslant 3$，则继续使用上面的讨论方法即可证明s是弱正则的.

(2)⇒(1)　设A是可除S-系，$s \in S$，$g: Ss \to A$是S-同态. 因为s是弱正则元，所以存在$r, r_1, \cdots, r_m, s_1, \cdots, s_m \in S$和$S$的右可消元$c_1, \cdots, c_m$，使得

$$s = s_1 rs,$$

$$s_1 c_1 = s_2 r_1, s_2 c_2 = s_3 r_2, \cdots, s_m c_m = sr_m.$$

所以$g(s) = g(s_1 rs) = s_1 g(rs)$. 由于$A$是可除的，所以对于$c_1 \in C$，存在$a_1 \in A$，使得$g(rs) = c_1 a_1$，所以

$$g(s) = s_1 c_1 a_1 = s_2 r_1 a_1.$$

对于$c_2 \in C$，存在$a_2 \in A$，使得$r_1 a_1 = c_2 a_2$，所以

$$g(s) = s_2c_2a_2 = s_3r_2a_2.$$

这个过程一直可以进行下去.最后可得

$$g(s) = sr_ma_m.$$

因此对任意 $t \in S$,有

$$g(ts) = tg(s) = tsr_ma_m.$$

定义 S- 同态 $f:S \to A$ 为 $f(t) = tr_ma_m, \forall\ t \in S$,则 $f|_{Ss} = g$. 这即证明了 A 是主弱内射的. //

定理 11.5 以下几条是等价的:

(1) 所有 S- 系是可除的;

(2) S 的所有左理想是可除的;

(3) ${}_SS$ 是可除的;

(4) 任意右可消元是右可逆的.

证明 (1)⇒(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(4) 设 c 是 S 的右可消元,则有 $cS = S$. 所以存在 $c' \in S$,使得 $cc' = 1$. 即 c 是右可逆的.

(4)⇒(1) 设 A 是任意 S- 系,c 是任意右可消元,则存在 $c' \in S$,使得 $cc' = 1$. 所以对于任意 $a \in A$,有

$$a = 1 \cdot a = c(c'a),$$

即 A 是可除的. //

由定理 8.16 可知所有 S- 系是主弱内射的当且仅当 S 是正则幺半群. 由定理 11.4 和 11.5 可以给出该结果的又一种证明方法.

设所有 S- 系是主弱内射的,则所有 S- 系是可除的,且所有可除 S- 系是主弱内射的. 所以由定理 11.4 和 11.5 可知 S 是弱正则幺半群且任意右可消元是右可逆元. 设 $s \in S$,则存在 $r, r_1, \cdots, r_m, s_1, \cdots, s_m \in S, c_1, \cdots, c_m \in C$,使得 $s = s_1rs, s_1c_1 = s_2r_1, s_2c_2 = s_3r_2, \cdots, s_mc_m = sr_m$. 对于每个 c_i,存在 $c_i' \in S$,使得 $c_ic_i' = 1$. 所以有

$$\begin{aligned} s &= s_1rs = s_1c_1c_1'rs = s_2r_1c_1'rs = s_2c_2c_2'r_1c_1'rs \\ &= s_3r_2c_2'r_1c_1'rs = s_3c_3c_3'r_2c_2'r_1c_1'rs = \cdots \\ &= s_mc_mc_m'r_{m-1}\cdots c_3'r_2c_2'r_1c_1'rs \\ &= s(r_mc_m'r_{m-1}\cdots c_3'r_2c_2'r_1c_1'r)s, \end{aligned}$$

即 s 是正则元.

反之,设 S 是正则的,则 S 是弱正则的,且任意右可消元是右可逆的. 所以由定理 11.4 和定理 11.5 即得结论.

本章讨论了内射 S- 系及其各种推广形式. 另外,[141],[143],[144],[145],[146],[149] 等文中讨论了各种右自内射幺半群(即 S_S 是内射右 S- 系的幺半群),例如右自内射正则幺半群,满足极小条件的右自内射幺半群等. [138],[139] 中讨论了逆半群上的内射 S- 系. [119] 中讨论了完全右 FSF- 内射幺半群. [31] 中讨论了左遗传幺半群(即所有左理想皆为投射 S- 系的幺半群)上的内射 S- 系. 有兴趣的读者可直接阅读原文. 另外,关于 S- 系的内射包的研究可参见[9],[52],[89] 等,其中[52] 中讨论的是相对于滤子 $\mathscr{P}$ 的 $\mathscr{P}$- 内射包.

第四章　平坦性

§1　函子 $\otimes$

定义 1.1　设 A 是右 S- 系，B 是左 S- 系，作卡氏积 $A \times B$. 令

$$H = \{((as,b),(a,sb)) \mid a \in A, b \in B, s \in S\},$$

记 $\rho = \rho(H)$ 为由 H 生成的 $A \times B$ 上的最小等价关系. 称商集 $A \times B/\rho$ 为 A 和 B 的张量积，记为 $A \otimes B$.

对任意 $a \in A, b \in B$，(a,b) 所在的等价类记为 $a \otimes b$. 显然对任意 $a \in A, b \in B, s \in S$，$as \otimes b = a \otimes sb$.

下面的定理可用来判断 $A \otimes B$ 中的两个元素是否相等.

定理 1.2　设 A 是右 S- 系，B 是左 S- 系，$a, a' \in A$，$b, b' \in B$，则在 $A \otimes B$ 中 $a \otimes b = a' \otimes b'$ 的充要条件是：存在 $a_1, \cdots, a_n \in A$，$b_2, \cdots, b_n \in B$，$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$，使得

$$\begin{array}{ll} a = a_1 s_1, & \\ a_1 t_1 = a_2 s_2, & s_1 b = t_1 b_2, \\ a_2 t_2 = a_3 s_3, & s_2 b_2 = t_2 b_3, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_n t_n = a', & s_n b_n = t_n b'. \end{array} \qquad (*)$$

证明　对任意 $a, a' \in A, b, b' \in B$，规定 $A \times B$ 上的关系 σ 如下：$(a,b)\sigma(a',b') \Leftrightarrow$ 存在 $a_1, \cdots, a_n \in A, b_2, \cdots, b_n \in B, s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$，使得等式组 $(*)$ 成立. 下证 σ 是 $A \times B$ 上的等价关系.

因为

$$\begin{array}{ll} a = a \cdot 1, & \\ a \cdot 1 = a, & 1 \cdot b = 1 \cdot b, \end{array}$$

所以 $(a,b)\sigma(a,b)$. 对称性是显然的. 设 $(a,b)\sigma(a',b')$, $(a',b')\sigma(a'',b'')$,则由如下等式组即知 $(a,b)\sigma(a'',b'')$:

$$
\begin{array}{ll}
a = a_1 s_1, & \\
a_1 t_1 = a_2 s_2, & s_1 b = t_1 b_2, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_n t_n = a' \cdot 1, & s_n b_n = t_n b', \\
a' \cdot 1 = a_1' u_1, & 1 \cdot b' = 1 \cdot b', \\
a_1' v_1 = a_2' u_2, & u_1 b' = v_1 b_2', \\
a_2' v_2 = a_3' u_3, & u_2 b_2' = v_2 b_3', \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_m' v_m = a'', & u_m b_m' = v_m b''.
\end{array}
$$

所以 σ 是等价关系.

对于任意 $((sa,b),(a,sb)) \in H$,由于

$$
\begin{array}{ll}
as = a \cdot s, & \\
a \cdot 1 = a, & s \cdot b = 1 \cdot sb,
\end{array}
$$

所以 $(as,b)\sigma(a,sb)$,从而 $\rho \subseteq \sigma$.

设 $(a,b)\sigma(a',b')$, 则有 $(a,b) = (a_1 s_1,b)\rho(a_1,s_1 b) = (a_1,t_1 b_2)\rho(a_1 t_1,b_2) = (a_2 s_2,b_2)\cdots(a_n s_n,b_n)\rho(a_n,s_n b_n) = (a_n,t_n b')\rho(a_n t_n,b') = (a',b')$,所以 $(a,b)\rho(a',b')$. 因此 $\sigma \subseteq \rho$.

这就证明了 $\sigma = \rho$. 所以由定义即得结论. //

命题 1.3 设 B 是左 S- 系,则 $S \otimes B \simeq B$.

证明 作映射 $\alpha: S \otimes B \to B$,

$$\alpha(s \otimes b) = sb, \quad \forall\, s \otimes b \in S \otimes B.$$

首先证明 α 是有定义的:设 $s,s' \in S, b,b' \in B$,使得在 $S \otimes B$ 中有 $s \otimes b = s' \otimes b'$,则由定理 1.2 知存在 $s_1,\cdots,s_n \in S, b_2,\cdots,b_n \in B, u_1,v_1,\cdots,u_n,v_n \in S$,使得

$$
\begin{array}{ll}
s = s_1 u_1, & \\
s_1 v_1 = s_2 u_2, & u_1 b = v_1 b_2, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}
$$

$$s_n v_n = s', \qquad u_n b_n = v_n b'.$$

所以 $sb = s_1u_1b = s_1v_1b_2 = s_2u_2b_2 = \cdots = s_nu_nb_n = s_nv_nb' = s'b'$.

作映射 $\beta: B \to S \otimes B$,

$$\beta(b) = 1 \otimes b, \quad \forall\, b \in B.$$

显然 β 是有定义的. 又 $\alpha\beta = 1, \beta\alpha = 1$,所以 $S \otimes B \simeq B$. //

同理可以证明

命题 1.4 设 A 是右 S- 系,则 $A \otimes S \simeq A$.

设 A 是右 S- 系,B 是左 S 右 T- 系,这里 T 也是一个幺半群. 作张量积 $A \otimes B$. 在 $A \otimes B$ 上定义右 T- 作用如下:

$$(a \otimes b) \cdot t = a \otimes bt, \quad \forall\, a \in A, b \in B, t \in T.$$

先证明上述定义是有意义的:设 $a \otimes b = a' \otimes b'$,这里 $a, a' \in A$, $b, b' \in B$,则由定理 1.2 知存在 $a_1, \cdots, a_n \in A, b_2, \cdots, b_n \in B, u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S$,使得

$$\begin{aligned} &a = a_1u_1, & & \\ &a_1v_1 = a_2u_2, & &u_1b = v_1b_2, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ &a_nv_n = a', & &u_nb_n = v_nb'. \end{aligned}$$

所以 $a \otimes bt = a_1u_1 \otimes bt = a_1 \otimes u_1bt = a_1 \otimes v_1b_2t = a_1v_1 \otimes b_2t = a_2u_2 \otimes b_2t = \cdots = a_nu_n \otimes b_nt = a_n \otimes u_nb_nt = a_n \otimes v_nb't = a_nv_n \otimes b't = a' \otimes b't$.

显然,对任意 $t, t' \in T, a \in A, b \in B$,在 $A \otimes B$ 中有 $(a \otimes b)(tt') = ((a \otimes b)t)t'$, $(a \otimes b) \cdot 1 = a \otimes b$,所以 $A \otimes B$ 是右 T- 系. 如果 C 是左 T- 系,则还可以作张量积 $(A \underset{S}{\otimes} B) \underset{T}{\otimes} C$,这里符号 $\underset{S}{\otimes}$ 表明是在 S 上作张量积,$\underset{T}{\otimes}$ 表明是在 T 上作张量积. 在不引起混淆的情况下省去 S 或 T.

设 $A_S, {}_SB_T, {}_TC$ 如上. 先作张量积 $B \underset{T}{\otimes} C$. 也可以在 $B \underset{T}{\otimes} C$ 上定义 S 的左作用而使得 $B \underset{T}{\otimes} C$ 成为左 S- 系. 然后还可以作张量积 $A \underset{S}{\otimes} (B \underset{T}{\otimes} T)$. 利用定理 1.2,和命题 1.3 的证明类似地可证明如下结

果：

命题 1.5 设 S,T 是幺半群，$A_S, {}_SB_T, {}_TC$ 如上，则有同构 $A \underset{S}{\otimes} (B \underset{T}{\otimes} C) \simeq (A \underset{S}{\otimes} B) \underset{T}{\otimes} C$.

设 B 是左 S-系，则 $S \otimes B$ 也是左 S-系. 考察命题 1.3 的证明，可以发现，映射 α, β 都是 S-同态，所以命题 1.3 中的 $S \otimes B \simeq B$ 不仅是集合同构，而且还是左 S-系同构. 同理命题 1.4 中的 $A \otimes S \simeq A$ 还是右 S-系同构.

固定左 S-系 B. 记集合范畴为 Set，规定：

$$-\otimes B: \quad \text{Act-}S \longrightarrow \text{Set},$$
$$A \longmapsto A \otimes B,$$
$$(A \xrightarrow{\alpha} A') \longmapsto (A \otimes B \xrightarrow{\alpha \otimes 1} A' \otimes B),$$

其中 $\alpha \otimes 1$ 的定义如下：

$$(\alpha \otimes 1)(a \otimes b) = \alpha(a) \otimes b, \quad \forall\, a \otimes b \in A \otimes B,$$

则有

定理 1.6 $-\otimes B$ 是从右 S-系范畴 Act-S 到集合范畴 Set 的函子.

证明 设 A, A', A'' 都是右 S-系，$A \xrightarrow{\beta} A' \xrightarrow{\alpha} A''$ 是 S-同态. 显然 $(\alpha\beta) \otimes 1 = (\alpha \otimes 1)(\beta \otimes 1)$. 又 $1_A \otimes 1 = 1_{A \otimes B}$. 所以 $-\otimes B$ 是函子. //

同理可证：

定理 1.7 设 A 是右 S-系，则 $A \otimes -$ 是从左 S-系范畴 S-Act 到集合范畴 Set 的函子.

命题 1.8 设 B 是左 S-系，则 $-\otimes B$ 把满同态变为满映射.

证明 设同态 $\alpha: A \to A'$ 是满的. 对于任意 $a' \otimes b \in A' \otimes B$，存在 $a \in A$，使得 $\alpha(a) = a'$. 所以 $(\alpha \otimes 1)(a \otimes b) = \alpha(a) \otimes b = a' \otimes b$. //

但是 $-\otimes B$ 不一定把单同态变为单映射，这种 B 的例子以后会见到很多.

定义 1.9 称左 S-系 B 是平坦的，如果函子 $-\otimes B$ 把任意单

同态变为单映射.

命题 1.10 S-系 B 是平坦的当且仅当:对于任意右 S-系 A,任意 $a,a'\in A$,映射 $(aS\cup a'S)\otimes B\to A\otimes B$ 是单的.

证明 设 A,C 是右 S-系且 $A\leqslant C$,$a,a'\in A$,$b,b'\in B$,在 $C\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$.因为 $a,a'\in C$,所以 $aS\cup a'S\leqslant C$.由条件知映射 $(aS\cup a'S)\otimes B\to C\otimes B$ 是单的,所以在 $(aS\cup a'S)\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$.因此在 $A\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$.即 $A\otimes B\to C\otimes B$ 是单映射.

另一个方向的证明是显然的. //

由此即可得到平坦性的一个重要等价条件.

定理 1.11 设 B 是左 S-系,则 B 是平坦的当且仅当:对任意右 S-系 A,任意 $a,a'\in A$,任意 $b,b'\in B$,若在 $A\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$,则在 $(aS\cup a'S)\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$.

下面考虑平坦 S-系的性质.

定理 1.12 设 $B_i(i\in I)$ 是 S-系,则 $\coprod\limits_{i\in I}B_i$ 是平坦系当且仅当每个 B_i 是平坦系.

证明 对于任意右 S-系 A,容易证明

$$A\otimes\left(\coprod_{i\in I}B_i\right)\simeq\coprod_{i\in I}(A\otimes B_i),$$

由此即得结论. //

定理 1.13 设 $A\leqslant B$,且自然包含同态 $A\to B$ 是可收缩的.如果 B 是平坦系,则 A 也是平坦系.

证明 设同态 $f:B\to A$ 满足 $f|_A=1$.

设 D 是右 S-系且 $C\leqslant D$,$c,c'\in C$,$a,a'\in A$,在 $D\otimes A$ 中有 $c\otimes a=c'\otimes a'$,则在 $D\otimes B$ 中有 $c\otimes a=c'\otimes a'$.因为 B 是平坦的,所以在 $C\otimes B$ 中有 $c\otimes a=c'\otimes a'$.因此在 $C\otimes A$ 中有 $c\otimes a=(1\otimes f)(c\otimes a)=(1\otimes f)(c'\otimes a')=c'\otimes a'$.这就证明了映射 $C\otimes A\to D\otimes A$ 是单的,从而 A 是平坦系. //

推论 1.14 投射系是平坦系.

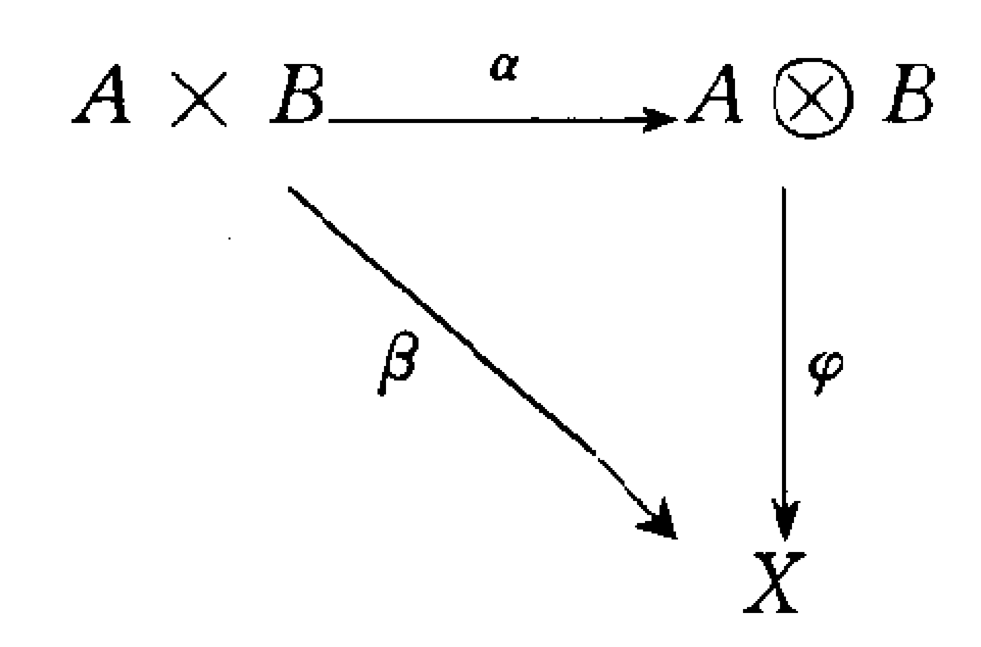
证明 对于任意 $e\in E(S)$,包含同态 $Se\to S$ 是可收缩的.而

由命题 1.4 知${}_SS$ 是平坦的，所以由定理 1.13 知 Se 是平坦的.

设 P 是投射 S-系，则 $P \simeq \coprod_{i\in I} Se_i, e_i \in E(S)$. 所以由定理 1.12 和上面已证的结果知 P 是平坦的. //

设 A 是右 S-系，B 是左 S-系，X 是集合. 映射 $\beta: A \times B \to X$ 称为是平衡的，如果对于任意 $a \in A$，任意 $b \in B$，任意 $s \in S$，恒有 $\beta(as, b) = \beta(a, sb)$. 令 $\alpha: A \times B \to A \otimes B$ 为：$\alpha(a, b) = a \otimes b$，则显然 α 是平衡映射.

定理 1.15 设 A 是右 S-系，B 是左 S-系，$\alpha: A \times B \to A \otimes B$ 是如上定义的平衡映射，则张量积 $A \otimes B$ 具有下述的泛性质：对于任意集合 X 和任意平衡映射 $\beta: A \times B \to X$，存在唯一映射 φ，使得下图可换：



证明 规定映射 $\varphi: A \otimes B \to X$ 如下：

$$\varphi(a \otimes b) = \beta(a, b), \quad \forall\, a \otimes b \in A \otimes B.$$

先说明 φ 的定义是可行的：设 $a \otimes b = a' \otimes b'$，这里 $a, a' \in A$，$b, b' \in B$. 要证明 $\beta(a, b) = \beta(a', b')$. 由定理 1.2 知存在 $a_1, \cdots, a_n \in A$，$b_2, \cdots, b_n \in B$，$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$，使得

$$\begin{aligned}
&a = a_1 s_1, \\
&a_1 t_1 = a_2 s_2, \qquad && s_1 b = t_1 b_2, \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots \\
&a_n t_n = a', && s_n b_n = t_n b',
\end{aligned}$$

所以 $\beta(a, b) = \beta(a_1 s_1, b) = \beta(a_1, s_1 b) = \beta(a_1, t_1 b_2) = \cdots = \beta(a_n, t_n b') = \beta(a_n t_n, b') = \beta(a', b')$.

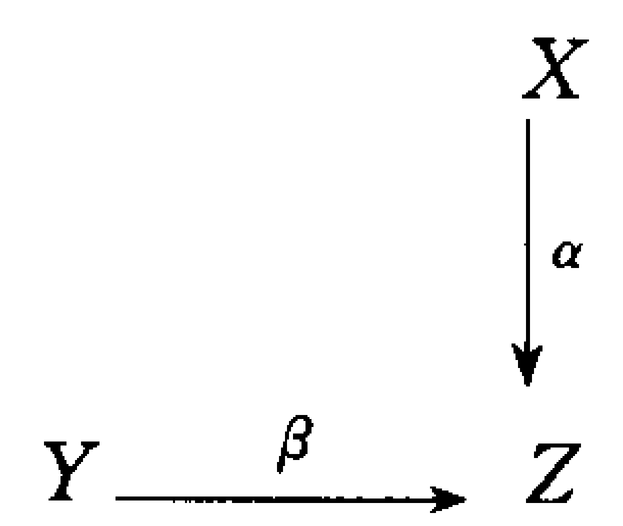
显然 $\beta = \varphi\alpha$. 下面证明 φ 还是唯一的. 设还有 $\varphi': A \otimes B \to X$ 满足 $\beta = \varphi'\alpha$，则对任意 $a \in A$，$b \in B$，$\varphi\alpha(a, b) = \varphi'\alpha(a, b)$，即

$\varphi(a\otimes b)=\varphi'(a\otimes b)$. 因为 $A\otimes B=\{a\otimes b\mid a\in A, b\in B\}$,所以 $\varphi=\varphi'$. //

因此,也可以用定理 1.15 中的泛性质来定义 A 和 B 的张量积. 注意用泛性质定义的构造都在同构意义下唯一,其证明也几乎是同一模式,参见第一章 §2.

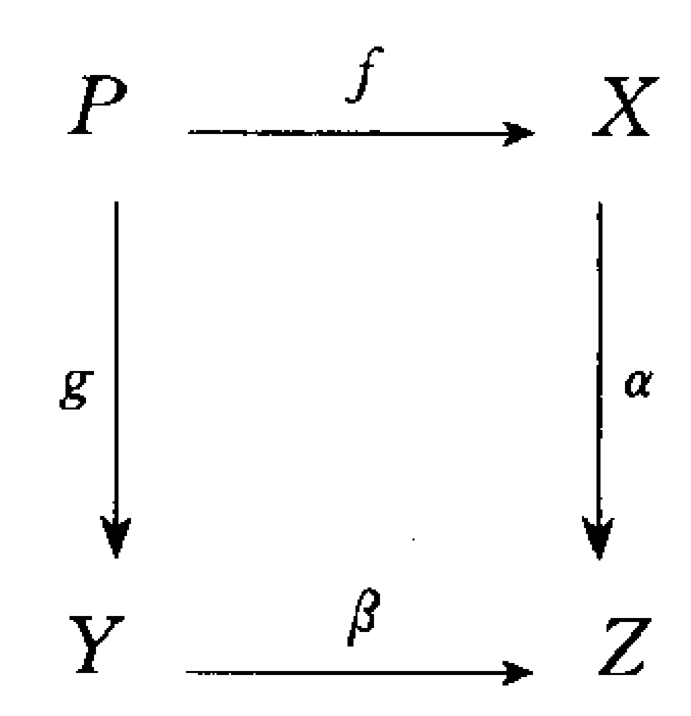
§2 条件(P)

设有右 S-系及 S-同态构成的图:

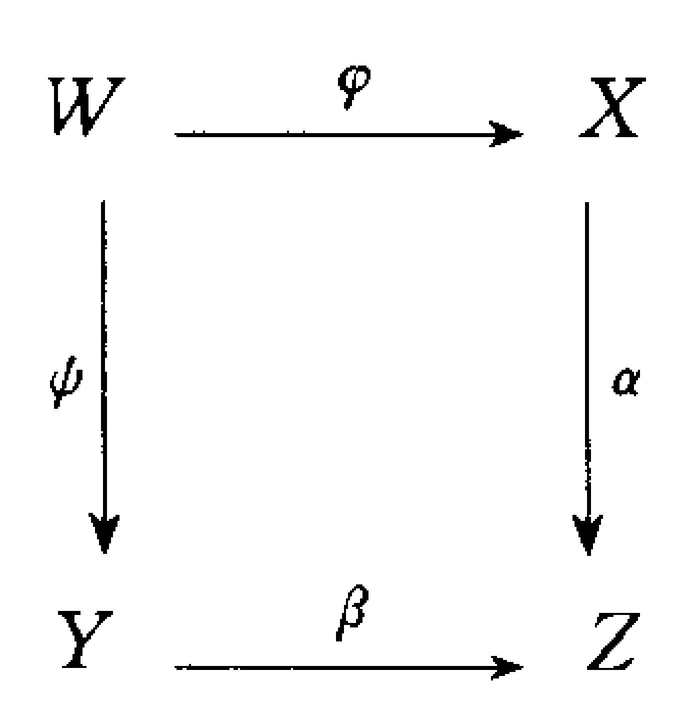


右 S-系 P 以及 S-同态 $f:P\to X, g:P\to Y$ 称为上图的拉回,如果以下两条被满足:

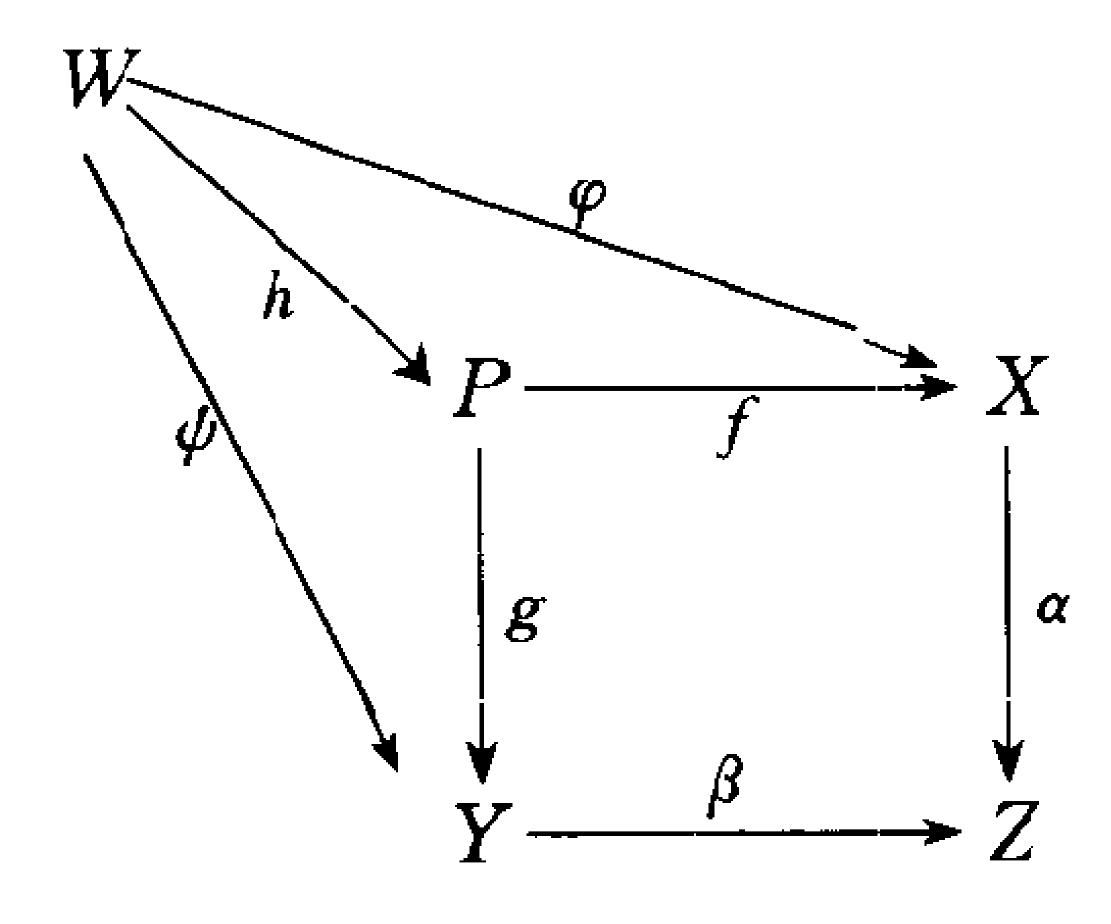
(1) 下图交换:



(2) 对于任意交换图



存在唯一同态 $h:W \to P$，使得下图可换：



容易证明，拉回若存在，则在同构意义下唯一.

命题 2.1 设 X,Y,Z,α,β 同上. 令

$$K = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y, \alpha(x) = \beta(y)\},$$

$\pi_1:K \to X$ 的定义为：$\pi_1(x,y) = x$，$\pi_2:K \to Y$ 的定义为：$\pi_2(x,y) = y$，则(K,π_1,π_2) 是拉回.

证明 显然 K 是右 S- 系，π_1,π_2 是 S- 同态. 对任意$(x,y) \in K$，$\alpha\pi_1(x,y) = \alpha(x) = \beta(y) = \beta\pi_2(x,y)$. 设 W 是右 S- 系，$\varphi:W \to X$，$\psi:W \to Y$ 是 S- 同态且 $\alpha\varphi = \beta\psi$. 规定映射 $h:W \to K$ 如下：

$$h(w) = (\varphi(w),\psi(w)), \quad \forall\, w \in W.$$

因为 $\alpha\varphi(w) = \beta\psi(w)$，所以 h 是有意义的. 显然 h 是 S- 同态，且 $\pi_1 h(w) = \varphi(w)$，$\pi_2 h(w) = \psi(w)$，所以 $\pi_1 h = \varphi$，$\pi_2 h = \psi$. 设还有 S- 同态 $h':W \to K$ 也满足 $\pi_1 h' = \varphi$，$\pi_2 h' = \psi$. 不妨设 $h(w) = (x,y) \in K$，$h'(w) = (x',y') \in K$，则 $x = \pi_1(x,y) = \pi_1 h(w) = \pi_1 h'(w) = \pi_1(x',y') = x'$，同理 $y = y'$. 所以 $h = h'$. 根据定义即知(K,π_1,π_2) 是拉回. //

定义 2.2 左 S- 系 B 称为是拉回平坦的，如果函子 $-\otimes B$ 把 Act-S 中的拉回图仍变为拉回图.

关于拉回平坦系的许多等价刻画放到 §4 中.

定义 2.3 称左 - 系 A 满足条件(P)，如果 $sa = s'a'$ $(s,s' \in S, a,a' \in A) \Rightarrow$ 存在 $a'' \in A$，$u,v \in S$，使得 $su = s'v$，$a = ua''$，$a' = va''$.

定理 2.4 满足条件(P) 的 S- 系是平坦系.

证明 设左S-系A满足条件(P)，Y是右S-系，$X \leqslant Y$，$x, x' \in X$，$a, a' \in A$，在$Y \otimes A$中有$x \otimes a = x \otimes a'$. 由定理1.2知存在$y_1, \cdots, y_n \in Y$，$a_2, \cdots, a_n \in A$，$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$，使得

$$\begin{aligned} &x = y_1 s_1, & \\ &y_1 t_1 = y_2 s_2, & s_1 a = t_1 a_2, \\ &y_2 t_2 = y_3 s_3, & s_2 a_2 = t_2 a_3, \\ &\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ &y_n t_n = x', & s_n a_n = t_n a'. \end{aligned}$$

对n用数学归纳法证明在$X \otimes A$中有$x \otimes a = x' \otimes a'$.

设$n = 1$，则有

$$\begin{aligned} &x = y_1 s_1, & \\ &y_1 t_1 = x', & s_1 a = t_1 a'. \end{aligned}$$

因为A满足条件(P)，所以存在$a_1 \in A$，$u, v \in S$，使得$s_1 u = t_1 v$，$a = u a_1$，$a' = v a_1$. 因此$xu = (y_1 s_1) u = y_1 (s_1 u) = y_1 t_1 v = x' v$，故有

$$\begin{aligned} &x = x \cdot 1, & \\ &xu = x' v, & 1 \cdot a = u a_1, \\ &x' \cdot 1 = x', & v a_1 = 1 \cdot a', \end{aligned}$$

从而由定理1.2知在$X \otimes A$中有$x \otimes a = x' \otimes a'$.

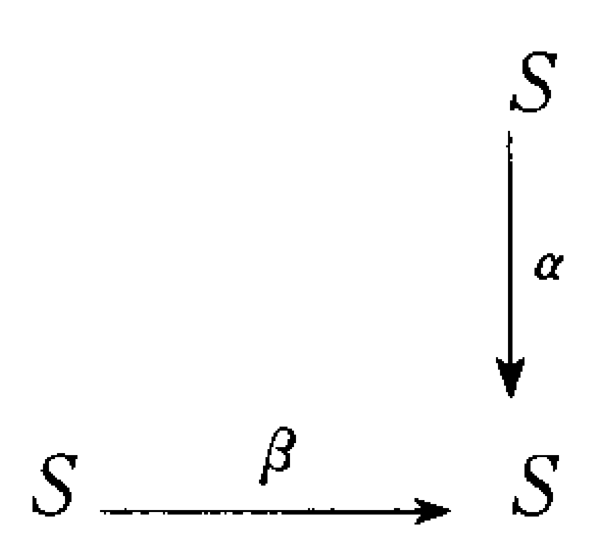
设$n > 1$. 对于$s_1 a = t_1 a_2$，由条件(P)知存在$u, v \in S$，$a_1 \in A$，使得$s_1 u = t_1 v$，$a = u a_1$，$a_2 = v a_1$. 所以有

$$\begin{aligned} &xu = y_1 s_1 u = y_1 t_1 v = y_2 s_2 v, & \\ &y_2 t_2 = y_3 s_3, & s_2 v a_1 = s_2 a_2 = t_2 a_3, \\ &\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ &y_n t_n = x', & s_n a_n = t_n a'. \end{aligned}$$

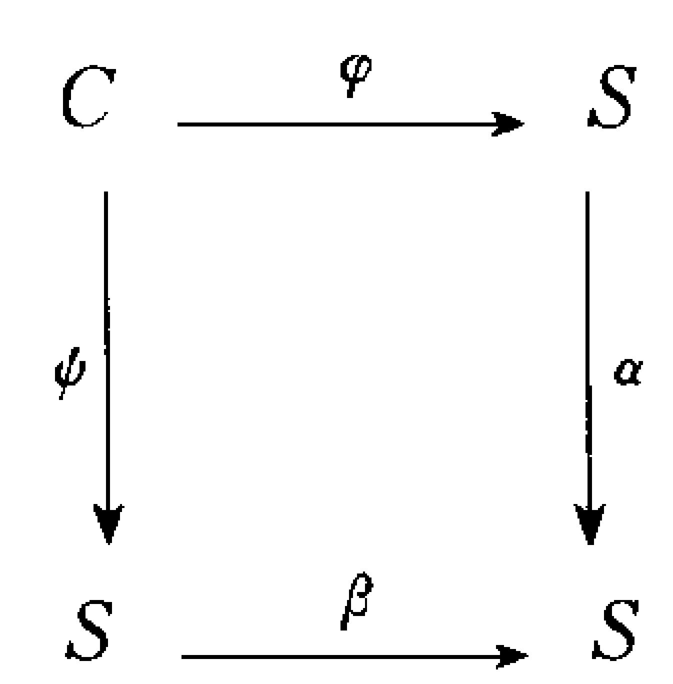
由归纳假定即知在$X \otimes A$中有$xu \otimes a_1 = x' \otimes a'$. 所以$x \otimes a = x \otimes u a_1 = xu \otimes a_1 = x' \otimes a'$. //

定理2.5 拉回平坦S-系满足条件(P).

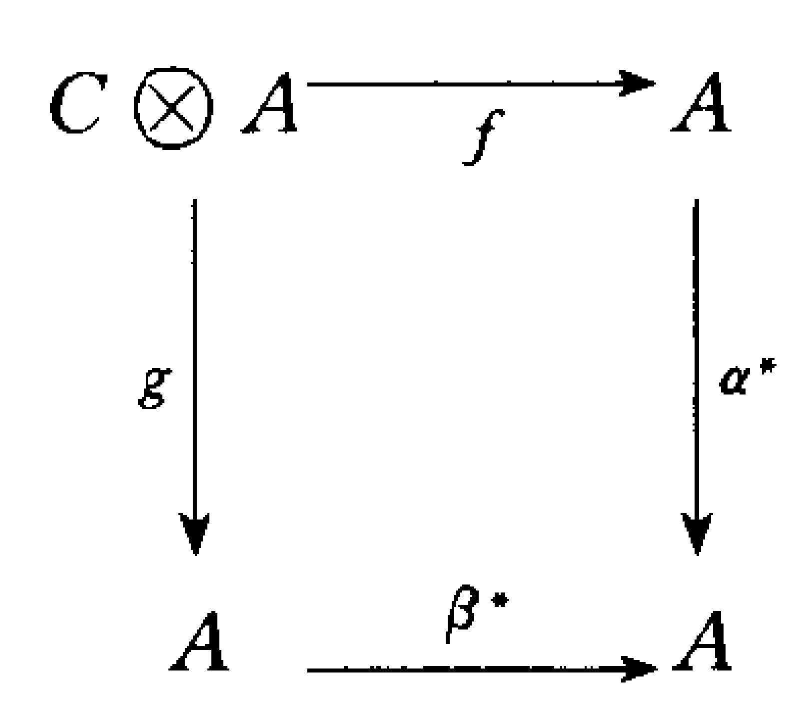
证明 设左S-系A是拉回平坦的. 再设$a, a' \in A$，$s, t \in S$满足$sa = ta'$. 考虑下图：



其中同态 α,β 的定义为：$\alpha(x)=sx,\beta(x)=tx,\forall\ x\in S$. 设 C 为上图的拉回，则有拉回图：



因为 A 是拉回平坦的，所以由命题 1.3 知有如下的拉回图：



这里 α^*,β^* 的定义为：$\alpha^*(a)=sa,\beta^*(a)=ta,\forall\ a\in A$. 由命题 2.1 知 $C\otimes A\simeq K=\{(x,y)\in A\times A\mid\alpha^*(x)=\beta^*(y)\}=\{(x,y)\in A\times A\mid sx=ty\}$. 记同构 $S\otimes A\to A$ 为 h，即 $h(s\otimes a)=sa$；记同构 $K\to C\otimes A$ 为 k，则 $f=h(\varphi\otimes 1),g=h(\psi\otimes 1)$. 因为 $sa=ta'$，所以 $(a,a')\in K$. 设 $k(a,a')=c\otimes a''\in C\otimes A$，则 $f(c\otimes a'')=h(\varphi(c)\otimes a'')=\varphi(c)a'',g(c\otimes a'')=h(\psi(c)\otimes a'')=\psi(c)a''$. 又 $f(c\otimes a'')=fk(a,a')=\pi_1(a,a')=a,g(c\otimes a'')=gk(a,a')=\pi_2(a,a')=a'$，这里同态 π_1,π_2 同命题 2.1. 所以有 $a=\varphi(c)a''$，$a'=\psi(c)a''$. 又显然有 $s\varphi(c)=\alpha\varphi(c)=\beta\psi(c)=t\psi(c)$. 所以 A 满足条件(P). //

推论 2.6 拉回平坦 S-系一定是平坦的.

命题2.7 设A是有限生成S-系.若A满足条件(P),则A是有限个循环子系的不交并.

证明 设$A = Sa_1 \cup Sa_2$.若$Sa_1 \cap Sa_2 = \varnothing$,则$A$就是循环子系的不交并.设$Sa_1 \cap Sa_2 \neq \varnothing$,假定$sa_1 = ta_2, s, t \in S$.由于$A$满足条件(P),所以存在$a' \in A, u, v \in S$,使得

$$su = tv, a_1 = ua', a_2 = va'.$$

若$a' \in Sa_1$,则$a_2 \in Sa_1$,所以$A = Sa_1$.若$a' \in Sa_2$,同理可得$A = Sa_2$.总之,A是循环子系的不交并.

设$A = Sa_1 \cup \cdots \cup Sa_n$,利用数学归纳法,类似于上面的证明即得结论. //

定理2.8 所有左S-系满足条件(P)当且仅当S是群.

证明 设S是群,A是左S-系,$a, a' \in A, s, t \in S$满足$sa = ta'$.令$u = s^{-1}t, v = 1, a'' = a'$,则有

$$su = ss^{-1}t = t \cdot 1 = tv, a = s^{-1}ta' = ua'', a' = 1 \cdot a'' = va''.$$

所以A满足条件(P).

反过来,设所有S-系满足条件(P).假定L是S的真左理想,构造S-系$A(L) = S(1,x) \cup (1,y)$.因为

$$S(1,x) \cap S(1,y) \neq \varnothing, S(1,x) \neq S(1,y),$$

所以由命题2.7即得矛盾.矛盾说明S没有真的左理想,所以S是群. //

为刻画所有左S-系都是拉回平坦系的幺半群,需要以下引理.

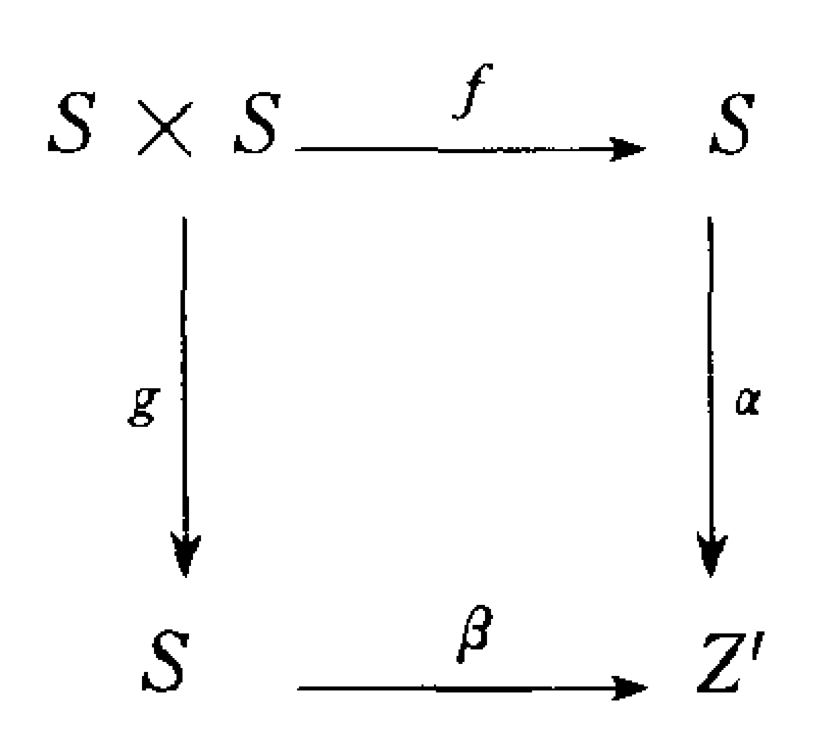
引理2.9 设S是群,A是右S-系,B是左S-系,则在$A \otimes B$中$a \otimes b = a' \otimes b'$当且仅当存在$g \in S$,使得$a = a'g$,且$gb = b'$.

证明 因为S是群,故利用定理1.2容易证得此结论. //

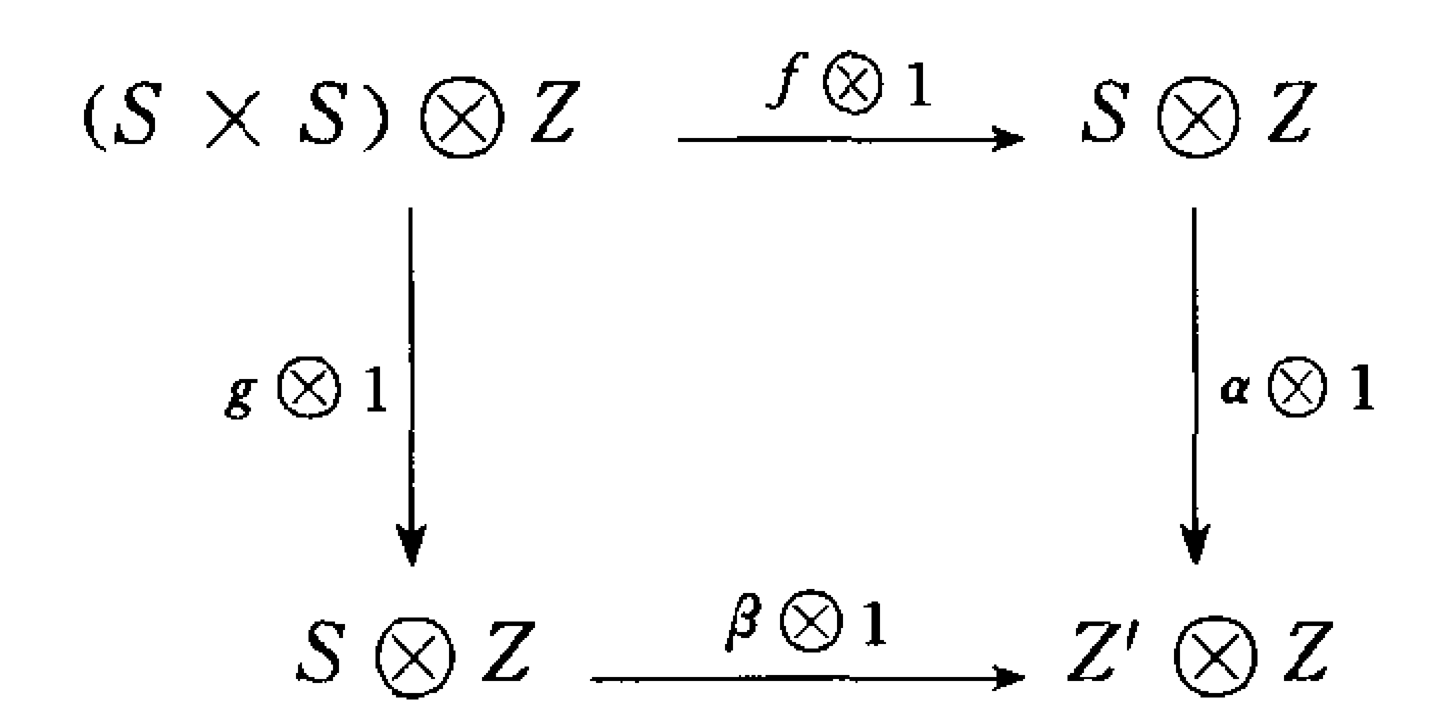
引理2.10 设S是群.Z为单元左S-系,则Z是拉回平坦的当且仅当$S = \{1\}$.

证明 若$S = \{1\}$,则$Z \simeq S$,所以Z显然是拉回平坦的.

反过来,设Z是拉回平坦的.考虑下面的交换图:



这里 $Z' = \{z'\}$ 是单元右 S- 系，S，$S\times S$ 都看成是右 S- 系，$\alpha(s) = z'$，$\beta(s) = z'$，$f(s,t) = s$，$g(s,t) = t$. 显然该图是拉回图. 所以下图也是拉回图：



因为 $S\otimes Z\simeq Z$，所以 $(S\times S)\otimes Z\simeq Z$. 因此 $|(S\times S)\otimes Z| = 1$. 故对任意 $g\in S$，$(1,g)\otimes z = (1,1)\otimes z$，这里 $Z = \{z\}$. 所以由引理 2.9 知存在 $g'\in S$，使得 $(1,g) = (1,1)g'$，从而 $g = g' = 1$. 即 $S = \{1\}$. //

定理 2.11 所有 S- 系都是拉回平坦的当且仅当 $S = \{1\}$.

证明 如果 $S = \{1\}$，则对任意右 S- 系 A 和左 S- 系 B 有 $A\otimes B = A\times B$. 所以容易证明任意左 S- 系都是拉回平坦的.

反之，设所有左 S- 系都是拉回平坦的，则所有左 S- 系都满足条件(P). 由定理 2.8 即知 S 是群. 所以由引理 2.10 可得结论. //

由定理 2.5 知任意拉回平坦系一定满足条件(P)，由定理 2.8 和定理 2.11 可知满足条件(P) 的系不一定是拉回平坦的.

最后给出条件(P) 的若干等价刻画以备以后引用. 为此先证下面的命题.

命题 2.12 设 A，B 分别是右、左 S- 系，a，$a'\in A$，b，$b'\in B$，则在 $A\otimes B$ 中有 $a\otimes b = a'\otimes b'$ 当且仅当存在 $b_1,\cdots,b_n\in B$，a_2，

$\cdots, a_n \in A, s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$，使得

$$\begin{aligned} & & b &= s_1 b_1, \\ a s_1 &= a_2 t_1, & t_1 b_1 &= s_2 b_2, \\ a_2 s_2 &= a_3 t_2, & t_2 b_2 &= s_3 b_3, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ a_n s_n &= a' t_n, & t_n b_n &= b'. \end{aligned} \tag{*}$$

证明 类似于定理 1.2 的证明. //

命题 2.13 设 B 是 S-系，以下两条等价：

(1) B 满足条件(P)；

(2) 对任意右 S-系 A，任意 $a, a' \in A, b, b' \in B$，在 $A \otimes B$ 中 $a \otimes b = a' \otimes b'$ 当且仅当存在 $b_1 \in B, s_1, t_1 \in S$，使得

$$b = s_1 b_1, \quad b' = t_1 b_1, \quad a s_1 = a' t_1.$$

证明 (1)⇒(2) 设 $a \otimes b = a' \otimes b'$，则由命题 2.12 知存在 $b_1, \cdots, b_n \in B, a_2, \cdots, a_n \in A, s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$，使得等式组(*)成立. 如果 $n = 1$，则结论即成立，设 $n \geqslant 2$. 对于等式 $t_1 b_1 = s_2 b_2$，由条件(P)知存在 $b'' \in B, u, v \in S$，使得 $t_1 u = s_2 v, b_1 = u b''$，$b_2 = v b''$. 所以有

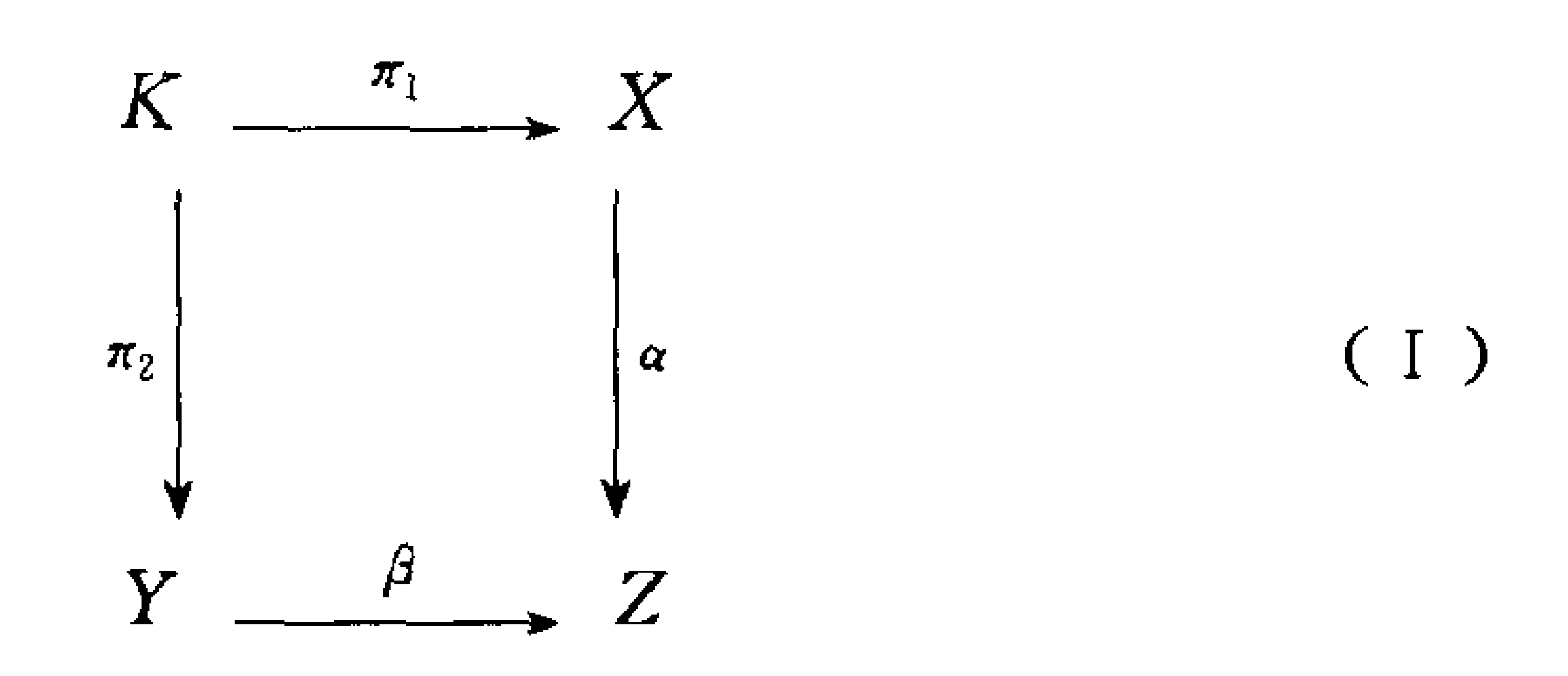
$$\begin{aligned} & & b &= s_1 u b'', \\ a s_1 u &= a_3 t_2 v, & t_2 v b'' &= s_3 b_3, \\ a_3 s_3 &= a_4 t_3, & t_3 b_3 &= s_4 b_4, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ a_n s_n &= a' t_n, & t_n b_n &= b'. \end{aligned}$$

此等式组的个数比(*)少 2，所以可用数学归纳法完成证明. 另一个方向是不证自明的.

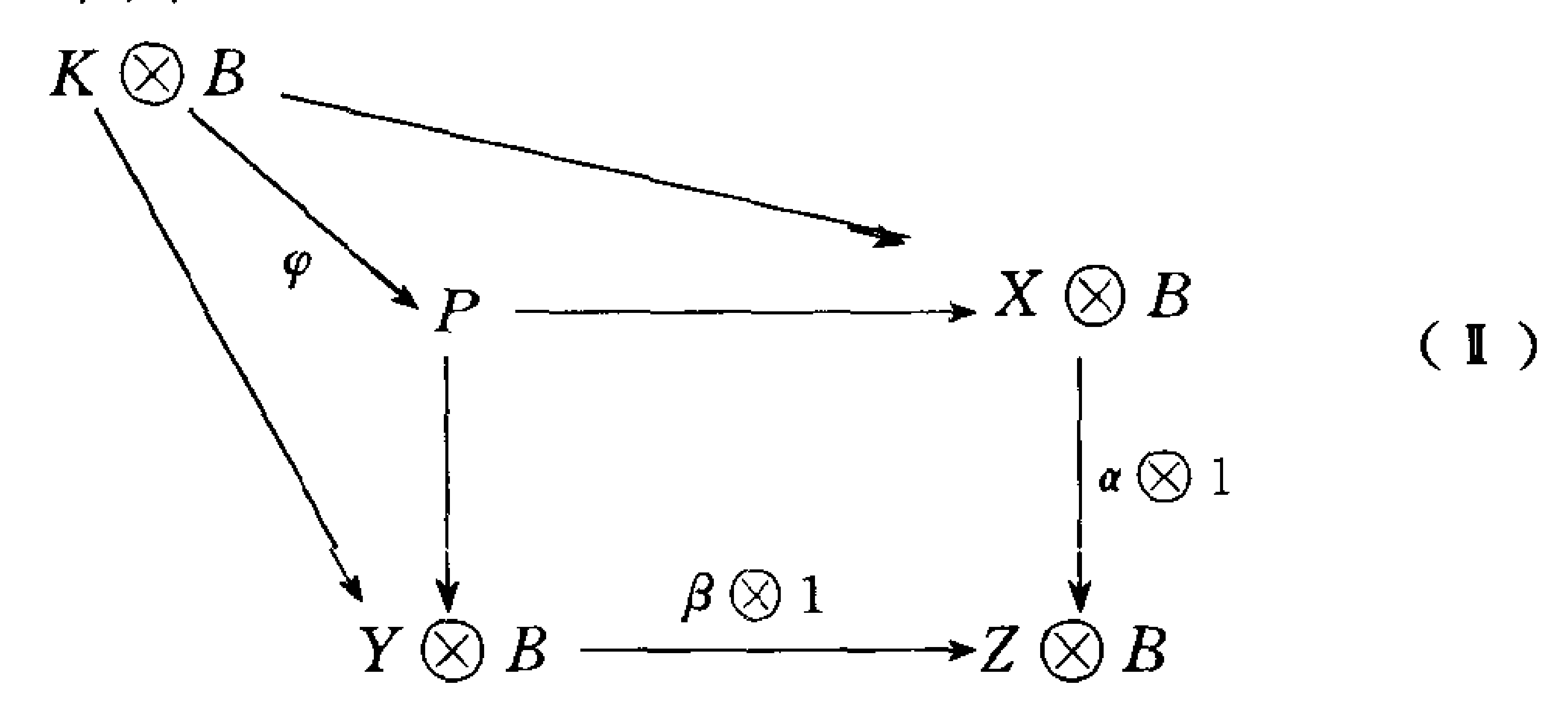
(2)⇒(1) 设 $b, b' \in B, s, t \in S$，使得 $sb = tb'$，则在 $S \otimes B$ 中有 $s \otimes b = t \otimes b'$. 所以由条件即知存在 $b_1 \in B, s_1, t_1 \in S$，使得 $b = s_1 b_1, b' = t_1 b_1, s s_1 = t t_1$. 因此 B 满足条件(P). //

下面利用拉回图给出条件(P)的等价刻画.

设有右 S-系的拉回图：



由命题 2.1 可设 $k = \{(x,y) \in X \times Y \mid a(x) = \beta(y)\}$. 设 B 是左 S- 系. 考虑下图:



其中

$$P = \{(x \otimes b, y \otimes b') \mid x \otimes b \in X \otimes B,\ y \otimes b' \in Y \otimes B, \alpha(x) \otimes b = \beta(y) \otimes b'\},$$

φ 的定义为

$$\varphi((x,y) \otimes b) = (x \otimes b, y \otimes b),\quad \forall\ b \in B, \forall\ (x,y) \in K,$$

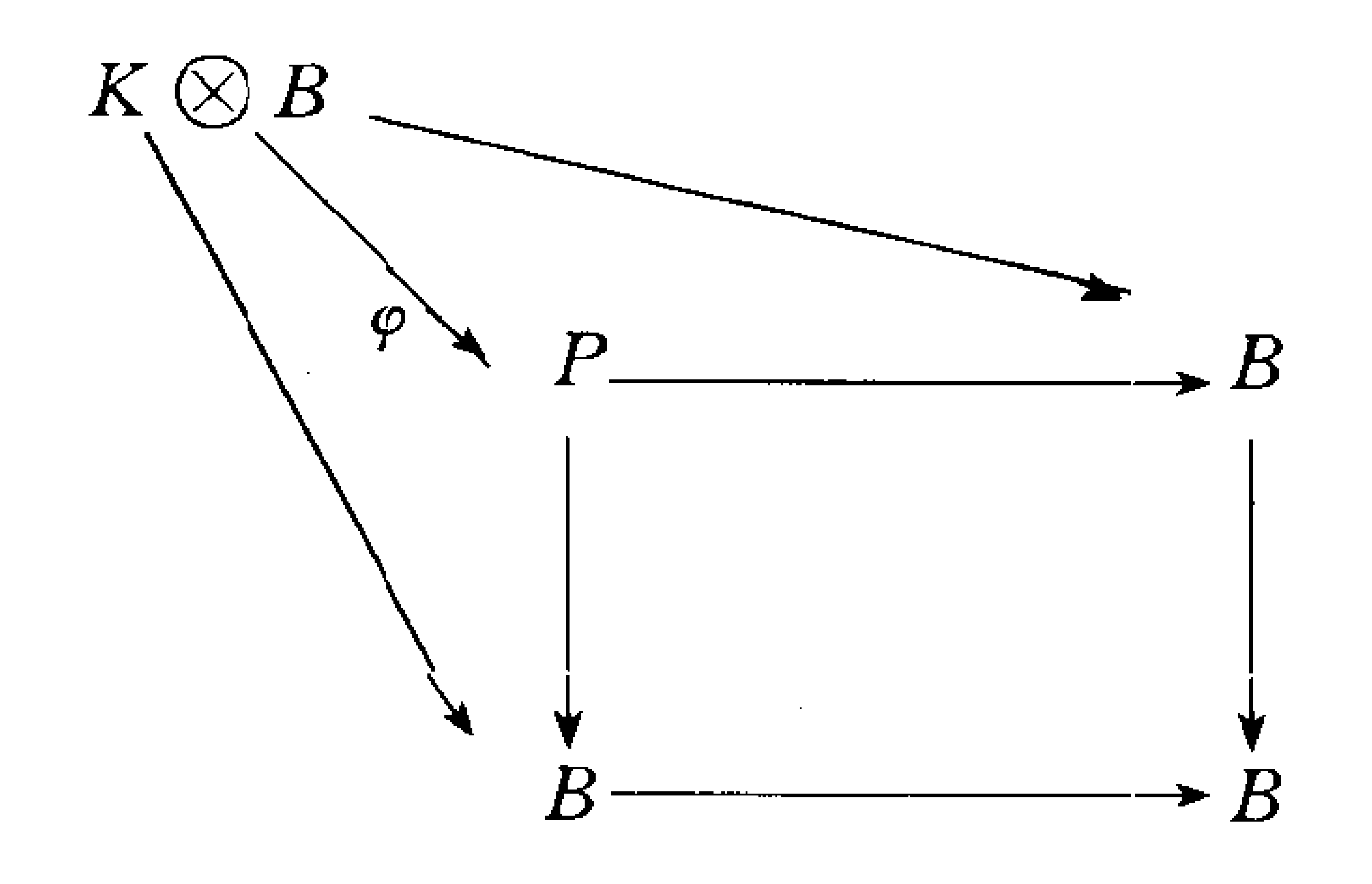
由定理 1.2 容易证明 φ 是有定义的,显然 B 是拉回平坦的当且仅当对任意拉回图(Ⅰ),图(Ⅱ)中对应的 φ 是一一映射. 对于条件(P),则有

命题 2.14 对于左 S- 系 B,以下两条是等价的:

(1) B 满足条件(P);

(2) 对于任意拉回图(Ⅰ),图(Ⅱ)中对应的 φ 是满射.

证明 (2)⇒(1) 设 $b_0, b_0' \in B, s, s' \in S$ 满足 $sb_0 = s'b_0'$. 在图(Ⅰ)中令 $X = Y = Z = S_S$, α, β 的定义分别为: $\alpha(x) = sx, \beta(x) = s'x, \forall\ x \in S$, 则 $K = \{(x,y) \in S \times S \mid sx = s'y\}$. 此时图(Ⅱ)为



其中

$$P = \{(b,b')\,|\,sb = s'b',b,b' \in B\},$$

φ的定义为

$$\varphi((x,y) \otimes b) = (xb,yb), \quad \forall\, b \in B,\forall\, (x,y) \in K.$$

因为$(b_0,b_0') \in P$,所以存在$b'' \in B,(x,y) \in K$,使得$\varphi((x,y) \otimes b'') = (xb'',yb'') = (b_0,b_0')$. 因此$b_0 = xb'',b_0' = yb''$,且$sx = s'y$.

(1)⇒(2)　任取$(x \otimes b,y \otimes b') \in P$,其中$P$如图(Ⅱ),则在$Z \otimes B$中有$\alpha(x) \otimes b = \beta(y) \otimes b'$. 因为$B$满足条件(P),所以由命题2.13知存在$b'' \in B,u,v \in S$,使得

$$b = ub'', \quad b' = vb'', \quad \alpha(x)u = \beta(y)v.$$

因为$\alpha(xu) = \alpha(x)u = \beta(y)v = \beta(yv)$,所以$(xu,yv) \in K$. 显然,$\varphi((xu,yv) \otimes b'') = (xu \otimes b'', yv \otimes b'') = (x \otimes ub'', y \otimes vb'') = (x \otimes b, y \otimes b')$,所以$\varphi$是满射. //

§3　均衡平坦性与条件(E)

称交换图

$$C \xrightarrow{f} A \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} B$$

为均衡图,如果对任意$a \in A$,若$\alpha(a) = \beta(a)$,则存在唯一的$c \in C$,使得$a = f(c)$.

显然上图为均衡图的充要条件是f单,且

$$\mathrm{Im} f = \{a \in A\,|\,\alpha(a) = \beta(a)\}.$$

上述定义中的 A,B,C 可以是集合，也可以是左 S- 系或右 S- 系，相应地 α,β,f 为映射或 S- 同态.

例 3.1 设 $f:C\to A$ 为左 S- 系的单同态. 记 $I=f(C)\leqslant A$，则下图是均衡图：

$$C\xrightarrow{f}A\underset{\theta}{\overset{\pi}{\rightrightarrows}}A/\lambda_I,$$

这里 $\theta(a)=0,\pi(a)=a\lambda_I,\forall\ a\in A$. 事实上，$\pi f=\theta f$ 是显然的. 设 $a\in A$，使得 $\pi(a)=\theta(a)$，则 $\pi(a)=0$，故 $a\in I$，所以存在唯一的 $c\in C$，使得 $f(c)=a$.

命题 3.2 设

$$C\xrightarrow{f}A\underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}}B$$

是均衡图，则 $C\simeq\{a\in A\mid\alpha(a)=\beta(a)\}=D$，且图

$$D\xrightarrow{g}A\underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}}B$$

仍是均衡图，其中 g 为自然的包含同态.

证明 根据均衡图的定义立得. //

定义 3.3 设 A 是左 S- 系，称 A 是均衡平坦的，如果函子 $-\otimes A$ 把 Act-S 中的均衡图变为 Set 中的均衡图.

例如，${}_SS$ 是均衡平坦的，从而自由系是均衡平坦的.

定义 3.4 称左 S- 系 A 满足条件(E)，如果对于任意 $s,t\in S$，任意 $a\in A$，若 $sa=ta$，则存在 $a'\in A,u\in S$，使得 $su=tu,a=ua'$.

例 3.5 设 J 是 S 的真左理想，则 $A(J)$ 满足条件(E). 这可由 $A(J)$ 的构造以及条件(E) 的定义来验证.

均衡平坦性和条件(E) 的关系为

定理 3.6 均衡平坦系一定满足条件(E).

证明 设 A 是均衡平坦左 S- 系，$a\in A,s,t\in S$，且 $sa=ta$. 定义 S- 同态 $\alpha,\beta:S\to S$ 为：$\alpha(x)=sx,\beta(x)=tx,\forall\ x\in S$. 令 $D=\{x\mid\alpha(x)=\beta(x),x\in S\}$，$f:D\to S$ 为包含同态. 由均衡图

$$D \xrightarrow{f} S \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} S$$

可得均衡图

$$D \otimes A \xrightarrow{f \otimes 1} S \otimes A \underset{\beta \otimes 1}{\overset{\alpha \otimes 1}{\rightrightarrows}} S \otimes A.$$

因为 $sa = ta$,所以 $(\alpha \otimes 1)(1 \otimes a) = s \otimes a = 1 \otimes sa = 1 \otimes ta = t \otimes a = (\beta \otimes 1)(1 \otimes a)$,因此存在 $d \otimes a' \in D \otimes A$,使得在 $S \otimes A$ 中有 $1 \otimes a = (f \otimes 1)(d \otimes a') = f(d) \otimes a' = d \otimes a' = 1 \otimes da'$. 所以 $a = da'$,且 $sd = td$. 故 A 满足条件(E). //

均衡平坦性与平坦性的关系为

定理 3.7 均衡平坦系一定是平坦的.

证明 设 A 是均衡平坦 S- 系,Y 是右 S- 系,$X \leqslant Y$. 令 $\rho = \rho_X$,规定同态 $\pi: Y \to Y/\rho$ 为 $\pi(y) = y\rho$,$\theta: Y \to Y/\rho$ 为 $\theta(y) = 0$. 由例 3.1 知

$$X \xrightarrow{f} Y \underset{\theta}{\overset{\pi}{\rightrightarrows}} Y/\rho$$

是均衡图,其中 f 为自然的包含同态. 由条件可知

$$X \otimes A \xrightarrow{f \otimes 1} Y \otimes A \underset{\theta \otimes 1}{\overset{\pi \otimes 1}{\rightrightarrows}} Y/\rho \otimes A$$

也是均衡图. 所以 $f \otimes 1$ 是单映射,从而 A 是平坦的. //

下面的例子说明满足条件(E) 的 S- 系不一定是平坦的,从而也不一定是均衡平坦的.

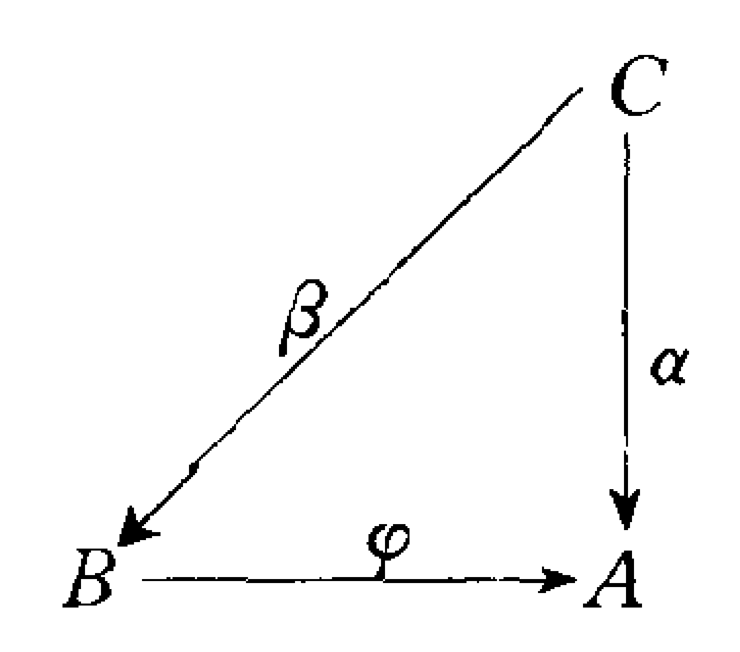
例 3.8 设 $S = (\mathbb{N}, \cdot)$,$J = 2\mathbb{N}$,则 J 是 S 的真理想. 已知 $A(J)$ 满足条件(E). 如果 $A(J)$ 是平坦的,则由命题 5.2.2 知对任意 $m \in 2\mathbb{N}$,必有 $m \in 2\mathbb{N}m$. 特别地有 $2 \in 4\mathbb{N}$. 矛盾. 矛盾说明 $A(J)$ 不是平坦的.

为了给出条件(E) 的等价刻画,先引入下述概念.

定义 3.9 设 A, B 是 S- 系,$\varphi: B \to A$ 是满同态. 称 φ 是 1- 纯的,如果对于任意 $a \in A$ 和任意一组等式 $s_i a = t_i a$, $i = 1, \cdots, n$,存在 $b \in B$,使得 $\varphi(b) = a$,且 $s_i b = t_i b$, $i = 1, \cdots, n$.

定义 3.10 称 S- 系 A 为有限表示的，如果 $A \simeq F/\lambda$，其中 F 为有限生成自由系，λ 为 F 上的有限生成同余.

引理 3.11 满同态 $\varphi: B \to A$ 是 1- 纯的当且仅当对于任意循环有限表示 S- 系 C 和任意 S- 同态 $\alpha: C \to A$，存在 S- 同态 $\beta: C \to B$，使得下图可换：



证明 设 $\varphi: B \to A$ 是 1- 纯的，C 是循环有限表示 S- 系，$\alpha: C \to A$ 是 S- 同态. 不妨设 $C = S/\lambda$，其中 λ 是由 $\{(s_i, t_i) \mid i = 1, \cdots, n\}$ 生成的 S 上的左同余. 显然有 $s_i\alpha(1\lambda) = \alpha(s_i\lambda) = \alpha(t_i\lambda) = t_i\alpha(1\lambda)$，$i = 1, \cdots, n$. 由 φ 的 1- 纯性知存在 $b \in B$，使得 $s_ib = t_ib, i = 1, \cdots, n$，且 $\varphi(b) = \alpha(1\lambda)$. 定义 $\beta: C \to B$ 为 $\beta(s\lambda) = sb$. 由命题 1.1.3 容易证明 β 是有定义的. 显然 β 是 S- 同态且 $\alpha = \varphi\beta$.

反之，设 $\varphi: B \to A$ 是满同态，$a \in A, s_i, t_i \in S$，满足 $s_ia = t_ia$，$i = 1, \cdots, n$. 令 $H = \{(s_i, t_i) \mid i = 1, \cdots, n\}$，$\lambda = \lambda(H)$ 是由 H 生成的最小左同余，$C = S/\lambda$，$\alpha: C \to A$ 定义为 $\alpha(s\lambda) = sa$. 容易证明 α 是 S- 同态. 由条件可知存在同态 $\beta: C \to B$，使得 $\alpha = \varphi\beta$. 所以有 $s_i\beta(1\lambda) = \beta(s_i\lambda) = \beta(t_i\lambda) = t_i\beta(1\lambda)$，且 $\varphi\beta(1\lambda) = \alpha(1\lambda) = 1 \cdot a = a$，即 $\varphi: B \to A$ 是 1- 纯的. //

引理 3.12 设 S- 系 A 满足条件(E). 如果 $a \in A, s_i, t_i \in S$，使得 $s_ia = t_ia, i = 1, \cdots, n$，那么存在 $a' \in A, u \in S$，使得 $a = ua'$，$s_iu = t_iu, i = 1, \cdots, n$.

证明 用数学归纳法容易证明. //

现在就可以给出条件(E)的等价刻画. 下述定理是 Normak[130] 中的结果.

定理 3.13 设 A 是 S- 系. 如下几条是等价的：

(1) A 满足条件(E)；

(2) 任意满同态 $\varphi:B\to A$ 是 1-纯的;

(3) 存在 1-纯的满同态 $\varphi:B\to A$,使得 B 是均衡平坦的;

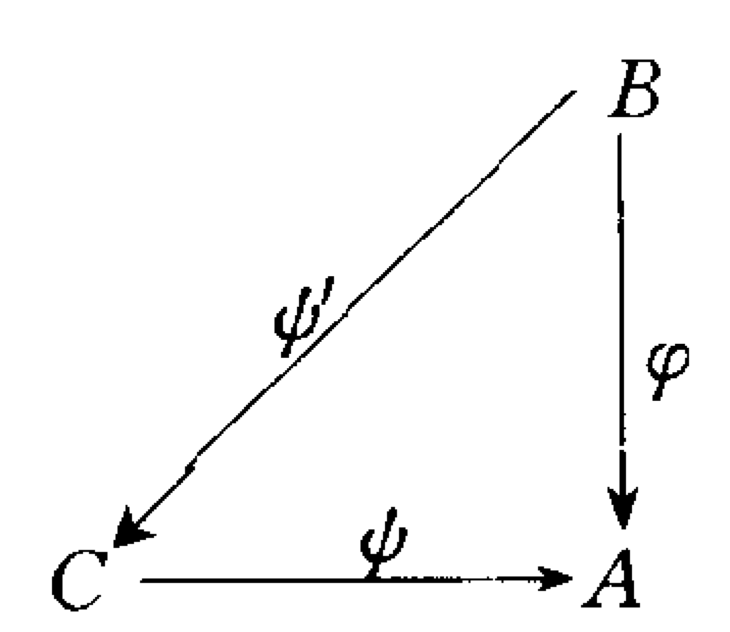
(4) 对于任意循环有限表示 S-系 B 以及 S-同态 $\varphi:B\to A$,存在自由 S-系 F 以及 S-同态 $\alpha:B\to F,\beta:F\to A$,使得 $\varphi=\beta\alpha$;

(5) 对于任意循环有限表示 S-系 B 以及 S-同态 $\varphi:B\to A$,存在均衡平坦 S-系 M 以及 S-同态 $\alpha:B\to M,\beta:M\to A$,使得 $\varphi=\beta\alpha$.

证明 (1)⇒(2) 设 $\varphi:B\to A$ 是满同态. 考虑 A 上的等式组 $s_ia=t_ia, i=1,\cdots,n$,这里 $a\in A,s_i,t_i\in S$. 由引理 3.12 知存在 $u\in S,a'\in A$,使得 $s_iu=t_iu, i=1,\cdots,n, a=ua'$. 设 $b\in B$ 满足 $\varphi(b)=a'$,则 $s_iub=t_iub, i=1,\cdots,n, \varphi(ub)=u\varphi(b)=ua'=a$. 所以 φ 是 1-纯的.

(2)⇒(3) 由命题 2.1.11 即得结论.

(3)⇒(4) 设 B 是循环有限表示 S-系, $\varphi:B\to A$ 是 S-同态. 不妨设 $B=S/\lambda$,其中 λ 是由 $\{(s_i,t_i)\mid i=1,\cdots,n\}$ 生成的 S 上的左同余. 由(3)知存在1-纯的满同态 $\psi:C\to A$,使得 C 是均衡平坦的. 所以由引理 3.11 知存在同态 $\psi':B\to C$,使得下图可换:



因为 $s_i\psi'(1\lambda)=\psi'(s_i\lambda)=\psi'(t_i\lambda)=t_i\psi'(1\lambda)$,而均衡平坦系满足条件(E),所以由引理 3.12 知存在 $u\in S,c\in C$,使得 $s_iu=t_iu, i=1,\cdots,n, \psi'(1\lambda)=uc$. 定义同态 $\alpha:B\to S$ 和 $\beta:S\to A$ 分别为

$$\alpha(s\lambda)=su,\quad \forall\, s\in S,$$
$$\beta(s)=\psi(sc),\quad \forall\, s\in S,$$

则有 $\varphi=\beta\alpha$.

(4)⇒(5) 因为自由系是均衡平坦系,所以结论立得.

(5)⇒(1) 设 $s,t\in S,a\in A$ 满足 $sa=ta$. 令 λ 是由 (s,t) 生成的最小左同余,规定映射 $\varphi:S/\lambda\to A, \varphi(s\lambda)=sa, \forall\, s\in S$. 容易

证明φ是有定义的且是S-同态. 由(5)知存在均衡平坦S-系M和S-同态$\alpha: S/\lambda \to M, \beta: M \to A$,使得$\varphi = \beta\alpha$. 显然$s\alpha(1\lambda) = \alpha(s\lambda) = \alpha(t\lambda) = t\alpha(1\lambda)$. 因为均衡平坦系满足条件(E),所以存在$m \in M, u \in S$,使得$su = tu, \alpha(1\lambda) = um$. 因此$u\beta(m) = \beta(um) = \beta\alpha(1\lambda) = \varphi(1\lambda) = a$. 即$A$满足条件(E). //

由该定理的证明可得如下的

推论 3.14 设满同态$\varphi: B \to A$是1-纯的. 若B满足条件(E),则A也满足条件(E).

命题 3.15 设λ是S的左同余,则循环S-系S/λ满足条件(E)的充要条件是:对于$s,t \in S$,如果$s\lambda t$,那么存在$u \in S$,使得$u\lambda 1$且$su = tu$.

证明 充分性 设$s,t \in S, a = x\lambda \in S/\lambda$满足$sa = ta$,则$sx\lambda = tx\lambda$,所以$sx\lambda tx$. 由条件即知存在$u \in S$,使得$sxu = txu$, $u\lambda 1$,因此$a = x\lambda = x(1\lambda) = x(u\lambda) = xu\lambda$,故令$a' = 1\lambda$即知$S/\lambda$满足条件(E).

必要性 设$s\lambda t, s,t \in S$,则$s(1\lambda) = t(1\lambda)$. 所以由条件(E)知存在$u \in S, a' = x\lambda \in S/\lambda$,使得$su = tu$,且$1\lambda = u(x\lambda)$. 所以$1\lambda = ux\lambda$而$sux = tux$. //

定理 3.16 以下几条等价:

(1) 所有S-系是均衡平坦的;

(2) 所有S-系满足条件(E);

(3) 所有循环S-系是均衡平坦的;

(4) 所有循环S-系满足条件(E);

(5) $S = \{1\}$或$S = \{1,0\}$.

证明 (1)⇒(2)⇒(4)和(1)⇒(3)⇒(4)是显然的.

(4)⇒(5) 取$u \in S$,定义S上的关系

$$s\lambda t \Leftrightarrow \text{存在正整数 } k,l, \text{使得 } su^k = tu^l.$$

显然λ是S上的左同余. 由(4)即知S/λ满足条件(E). 因为$1\lambda u$,所以由命题3.15知存在$v \in S$,使得$v = uv, v\lambda 1$. 由λ的定义即知存在正整数k,l,使得$u^k = vu^l$. 所以$u^{k+1} = uu^k = uvu^l = vu^l = u^k$.

因此对于任意 $u \in S$，存在正整数 m，使得 u^m 是幂等元.

设 $1 \neq e \in E(S)$. 由条件知 S/λ_{Se} 满足条件(E). 设 $x \in Se$，则 $x\lambda_{Se}e$. 由命题 3.15 知存在 $u \in S$，使得 $xu = eu$，$u\lambda_{Se}1$. 由此即得 $u = 1$，从而 $x = e$. 这说明任意 $s \in S$，$se = e$，因此 e 是 S 的右零元.

设 I 是 S 的所有右零元构成的集合. 若 I 非空，则 I 一定是 S 的左理想. 若 $I = S$，则 $S = \{1\}$. 所以下设 $I \neq S$. 由条件知 S/λ_I 满足条件(E). 取 $x, y \in I$，则 $x\lambda_I y$. 由命题 3.15 即知存在 $u \in S$，使得 $xu = yu$，$u\lambda_I 1$. 所以 $u = 1$，从而 $x = y$. 这说明 S 具有唯一的右零元，因此 S 含有零元.

因此对任意 $u \in S$，存在自然数 m，使得

$$u^m = 1, \quad 或 \quad u^m = 0.$$

令

$$G = \{u \in S \mid u^m = 1\},$$
$$N = \{u \in S \mid u^m = 0\},$$

则 $S = G \dot{\cup} N$，从而容易证明 G 是 S 的子群，N 是 S 的子半群，取 $g \in G$ 但 $g \neq 1$. 由开始的证明可知存在 $V \in S$，使得 $V = gv$，$g^k = vg^l$，这里 k 和 l 是自然数. 由 $g^k = vg^l$ 可知 $v \in G$，所以 $g = 1$. 矛盾. 这说明 $S = \{1\} \dot{\cup} N$. 若 $N = \varnothing$，则 $S = \{1\}$. 下设 $N \neq \varnothing$. 设 $t \in N$，则存在自然数 m 使得 $t^m = 0$. 所以 $t^{m-1}t = 0 = t^m t$. 因为 St 满足条件(E)，所以存在 $u \in S$，$a = pt \in St$，使得

$$t^{m-1}u = t^m u, \quad t = ua = upt.$$

如果 $up = 1$，则 $t^{m-1} = t^m$. 如果把 m 取为满足 $t^m = 0$ 的最小自然数，那么就得到矛盾. 所以 $up \neq 1$，从而 $up \in N$. 因此存在自然数 n 使得 $(up)^n = 0$. 所以

$$t = upt = (up)^2 t = \cdots = (up)^n t = 0.$$

因此 $N = \{0\}$. 从而 $S = \{1, 0\}$.

(5)⇒(1)　若 $S = \{1\}$，则所有 S-系都是自由的，从而是均衡平坦的. 所以下设 $S = \{1, 0\}$.

设 A 是左 S-系，下图是右 S-系的均衡图：

$$K \xrightarrow{f} X \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} Y$$

其中

$$K = \{x \in X \mid \alpha(x) = \beta(x)\},$$

f 是包含同态. 用函子 $- \otimes A$ 作用可得交换图

$$K \otimes A \xrightarrow{f \otimes 1} X \otimes A \overset{\alpha \otimes 1}{\underset{\beta \otimes 1}{\rightrightarrows}} Y \otimes A.$$

在下一章中将要证明若 S 是正则幺半群,则所有满足条件(E)的 S-系是平坦的. 因为 $S = \{1,0\}$,所以容易直接证明所有 S-系都满足条件(E),从而所有 S-系都是平坦的,特别地 A 是平坦系,所以 $f \otimes 1$ 是单射.

设 $x \otimes a \in X \otimes A$,满足 $(\alpha \otimes 1)(x \otimes a) = (\beta \otimes 1)(x \otimes a)$,则 $\alpha(x) \otimes a = \beta(x) \otimes a$. 所以存在 $y_1, \cdots, y_n \in Y, a_2, \cdots, a_n \in A$, $s_1, \cdots, s_n, t_1, \cdots, t_n \in S$,使得

$$\begin{aligned}
&\alpha(x) = y_1 s_1, && \\
&y_1 t_1 = y_2 s_2, && s_1 a = t_1 a_2, \\
&y_2 t_2 = y_3 s_3, && s_2 a_2 = t_2 a_3, \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots \\
&y_n t_n = \beta(x), && s_n a_n = t_n a.
\end{aligned}$$

如果 $s_1 = \cdots = s_n = t_1 = \cdots = t_n = 1$,则 $\alpha(x) = y_1 = y_2 = \cdots = \beta(x)$,因此 $x \in K$,从而 $x \otimes a \in K \otimes A$. 设 $s_1 = t_n = 0$,则 $\alpha(x) = y_1 s_1 = y_1 0 = y_2 0 = \cdots y_n 0 = y_n t_n = \beta(x)$,所以 $x \in K$,从而 $x \otimes a \in K \otimes A$. 设 $s_1 = 1$. 如果 $t_1 = 0$,那么 $a = 0a_2 = 0a$,又 $\alpha(x \cdot 0) = \alpha(x)0 = y_1 0 = y_2 0 = \cdots = y_n 0 = \beta(x)0 = \beta(x \cdot 0)$,所以 $x0 \in K$. 因此 $x \otimes a = x \otimes 0a = x0 \otimes a \in K \otimes A$. 如果 $t_1 = 1$,那么上述等式组中等式的个数可减少 2,从而可以利用数学归纳法. 若 $t_n = 1$,则和 $s_1 = 1$ 时的证明类似地进行证明. 因此 A 是均衡平坦的. //

例 3.17 令 $S = \{1,0\}$,则由定理 3.16 知任意 S-系都是均衡平坦的. 但 S 不是群,所以存在不满足条件(P)(从而存在不是拉回

平坦）的 S- 系. 例如令

$$A = \{x,y,z \mid 0x = 0y = 0z = z, 1x = x, 1y = y, 1z = z\},$$

则由命题 2.7 知 A 不满足条件(P)，从而 A 不是拉回平坦的.

由定理 3.7 可知任意均衡平坦系一定是平坦的，但下面的例子说明平坦系不一定是均衡平坦的.

例 3.18 设 G 是群且 $|G| \geqslant 2$，则由定理 2.8 知所有 S- 系都满足条件(P)，从而所有 S- 系都是平坦的. 但由 3.16 知存在不是均衡平坦的 S- 系.

§4 强平坦性

定义 4.1 称 S- 系 A 是强平坦的，如果它既是拉回平坦的，又是均衡平坦的.

本节中要证明如下的主要定理，其中(1)，(3)，(4) 的等价性是[10] 中的结果，(1)，(2) 的等价性是[154] 中的结果.

定理 4.2 设 A 是 S- 系，以下几条是等价的：

(1) A 是强平坦的；

(2) A 满足条件(P) 和(E)；

(3) A 满足条件

(PF) *若* $sa = s'a', ta = t'a', a, a' \in A, s, t, s', t' \in S$，*则存在* $a'' \in A, u, v \in S$，*使得*

$$su = s'v, \qquad tu = t'v,$$

$$a = ua'', \qquad a' = va'';$$

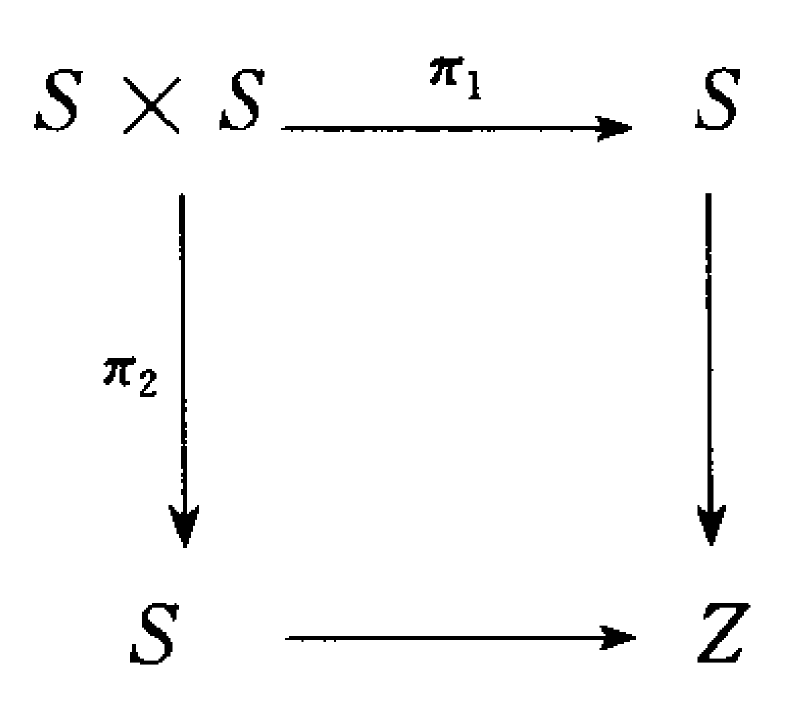
(4) A 是拉回平坦的.

这个定理说明拉回平坦和强平坦是一致的，从而拉回平坦系一定是均衡平坦系.

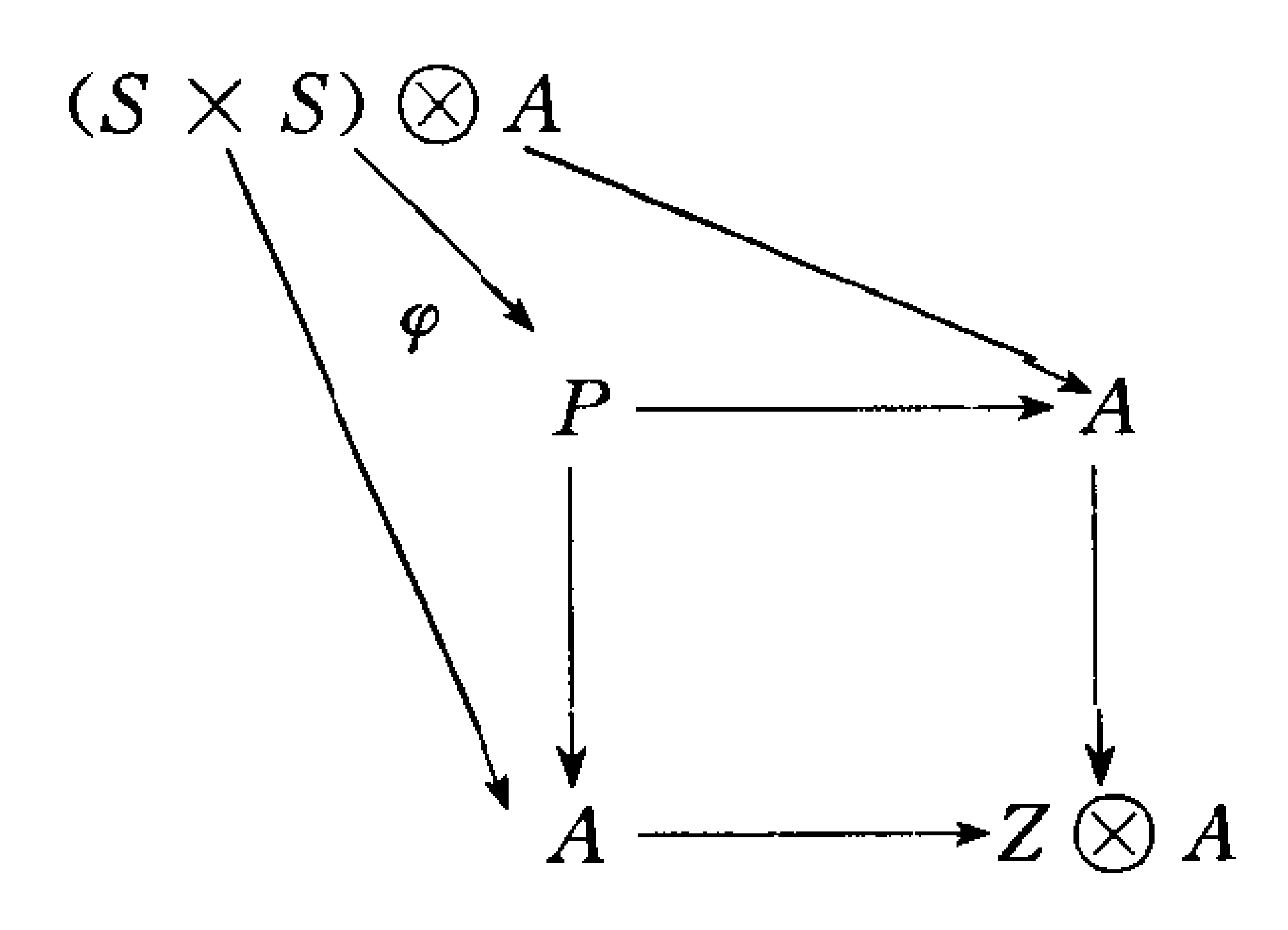
定理的证明 (1)⇒(4) 显然.

(4)⇒(3) 设 A 是拉回平坦的，$a, a' \in A, s, t, s', t' \in S$ 满足 $sa = s'a', ta = t'a'$.

设 $Z = \{z\}$ 是一元右 S- 系，考虑如下的右 S- 系拉回图：



其中 π_1, π_2 是自然的投射. 由 § 2的讨论可知，下图中的 φ 是一一对应：



这里

$$P = \{(a_1, a_2) \mid z \otimes a_1 = z \otimes a_2, a_1, a_2 \in A\},$$

φ 的定义为

$$\varphi((p,q) \otimes a_1) = (pa_1, qa_1), \quad \forall\, a_1 \in A, \forall\, p,q \in S.$$

因为 $sa = s'a', ta = t'a'$，所以 $\varphi((s,t) \otimes a) = (sa, ta) = (s'a', t'a') = \varphi((s',t') \otimes a')$，从而在 $(S \times S) \otimes A$ 中有 $(s,t) \otimes a = (s',t') \otimes a'$. 因为 A 是拉回平坦的，所以 A 满足条件(P). 因此由命题 2.13 知存在 $a'' \in A, u, v \in S$，使得

$$a = ua'', a' = va'', (s,t)u = (s',t')v,$$

所以条件(PF) 成立.

(3)⇒(2)　在条件(PF) 中，取 $s = t, s' = t'$，则即得条件(P). 下面证明(PF) 可推出(E).

设 $a \in A, s,t \in S$ 满足 $sa = ta$. 对于等式组

$$sa = ta, \quad ta = sa$$

应用条件(PF)可知存在 $a_1 \in A, x, y \in S$，使得

$$sx = ty, \quad tx = sy$$
$$a = xa_1, \quad a = ya_1.$$

对于等式组

$$1 \cdot a = xa_1, \qquad 1 \cdot a = ya_1$$

应用条件(PF)可知存在 $a'' \in A, u, v \in S$，使得

$$u = xv, \qquad u = yv,$$
$$a = ua'', \qquad a_1 = va''.$$

所以 $a = ua'', su = syv = txv = tu$. 即 A 满足条件(E).

(2)⇒(1) 先证明此时 A 是均衡平坦的.

设

$$K \xrightarrow{f} X \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} Y$$

是右 S-系的均衡图，不妨设 $K = \{x \in X \mid \alpha(x) = \beta(x)\}$，$f$ 是包含同态. 用函子 $-\otimes A$ 作用后可得

$$K \otimes A \xrightarrow{f \otimes 1} X \otimes A \overset{\alpha \otimes 1}{\underset{\beta \otimes 1}{\rightrightarrows}} Y \otimes A.$$

令

$$L = \{x \otimes a \in X \otimes A \mid \alpha(x) \otimes a = \beta(x) \otimes a\}.$$

显然

$$k \otimes A = \{x \otimes a \mid a \in A, x \in X, \alpha(x) = \beta(x)\},$$

要证 A 是均衡平坦的，只需证明 $L = K \otimes A$ 即可. 显然 $K \otimes A \subseteq L$. 设 $x \otimes a \in L$，则 $\alpha(x) \otimes a = \beta(x) \otimes a$. 因为 A 满足条件(P)，所以由命题 2.13 知存在 $a_1 \in A, u, v \in S$，使得

$$a = ua_1, \quad a = va_1, \quad \alpha(x)u = \beta(x)v.$$

再由等式 $ua_1 = va_1$ 及条件(E)可知存在 $a'' \in A, t \in S$，使得 $ut = vt, a_1 = ta''$. 所以 $\alpha(xut) = \alpha(x)ut = \beta(x)vt = \beta(xvt) = \beta(xut)$，从而 $xut \in K$，因此 $xut \otimes a'' \in K \otimes A$. 而 $x \otimes a = x \otimes ua_1 = xu \otimes a_1 = xu \otimes ta'' = xut \otimes a''$，所以 $x \otimes a \in K \otimes A$. 因此有 $L \subseteq K \otimes A$. 总之有 $L = K \otimes A$，故 A 是均衡平坦的.

下面证明 A 满足条件(PF).

设 $s,s',t,t' \in S, a,a' \in A$ 满足 $sa=s'a', ta=t'a'$. 由条件(P)知存在 $a_1 \in A, u_1, v_1 \in S$,使得

$$a = u_1 a_1, \quad a' = v_1 a_1, \quad su_1 = s'v_1.$$

所以 $tu_1 a_1 = t'v_1 a_1$. 由条件(E)可知存在 $a'' \in A, u \in S$,使得

$$tu_1 u = t'v_1 u, \quad a_1 = ua''.$$

所以有

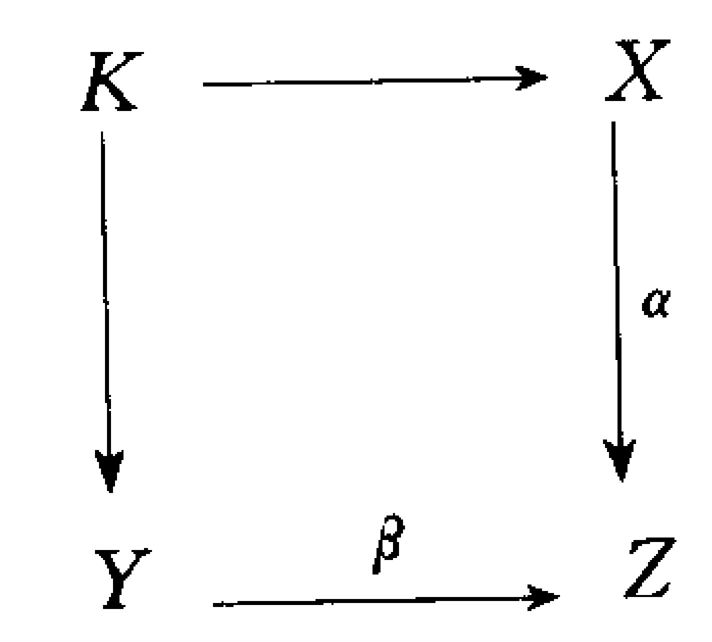
$$a = u_1 a_1 = u_1 ua'', \qquad a' = v_1 a_1 = vua'',$$

$$su_1 u = s'v_1 u, \qquad tu_1 u = t'v_1 u,$$

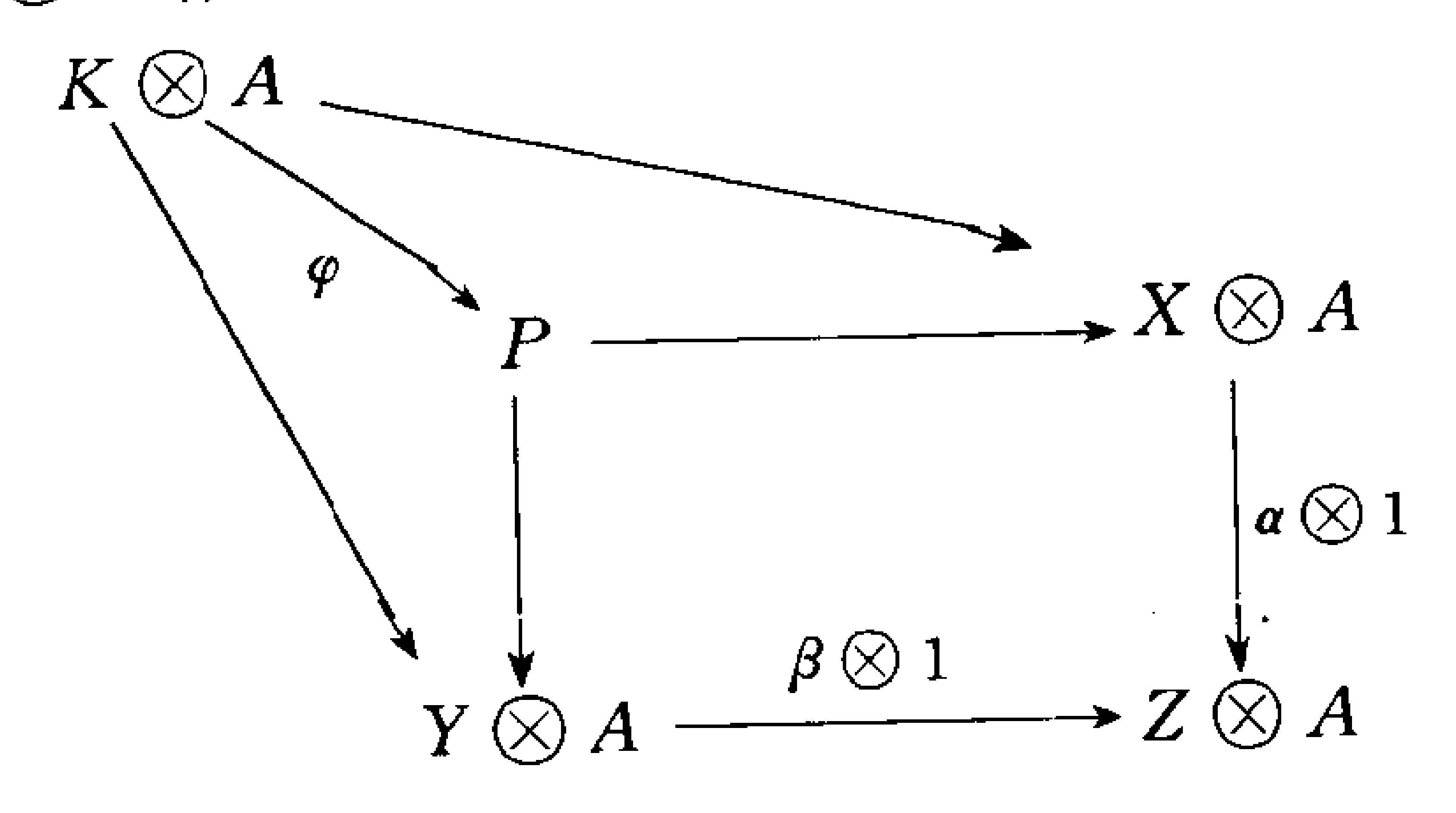
即 A 满足条件(PF).

最后证明 A 是拉回平坦的.

设有拉回图



用函子 $-\otimes A$ 作用后可得



其中

$$P = \{(x \otimes a, y \otimes a') \in (X \otimes A) \times (Y \otimes A) \mid \alpha(x) \otimes a = \beta(y) \otimes a'\},$$

$$K = \{(x,y) \in X \times Y \mid \alpha(x) = \beta(y)\},$$

$$\varphi((x,y) \otimes a) = (x \otimes a, y \otimes a).$$

因为 A 满足条件(P)，所以由命题 2.14 知 φ 是满射．由 §2 的讨论可知，只需证明 φ 是单射即可．

设 $a,a' \in A, x,x' \in X, y,y' \in Y$，满足 $\varphi((x,y)\otimes a) = \varphi((x',y')\otimes a')$，则有 $(x\otimes a, y\otimes a) = (x'\otimes a', y'\otimes a')$，所以 $x\otimes a = x'\otimes a', y\otimes a = y'\otimes a'$．由命题 2.13 知存在 $u_1,v_1,u_2,v_2 \in S, a_1,a_2 \in A$，使得

$$a = u_1a_1, \quad a' = v_1a_1, \quad xu_1 = x'v_1,$$
$$a = u_2a_2, \quad a' = v_2a_2, \quad yu_2 = y'v_2.$$

对于等式组

$$u_1a_1 = u_2a_2, \quad v_1a_1 = v_2a_2$$

利用条件(PF) 可知存在 $a'' \in A, u,v \in S$，使得

$$a_1 = ua'', \qquad a_2 = va'',$$
$$u_1u = u_2v, \qquad v_1u = v_2v.$$

所以，$xu_1u = x'v_1u = x'v_2v, yu_1u = yu_2v = y'v_2v$，从而 $(x,y)\otimes a = (x,y)\otimes u_1a_1 = (x,y)\otimes u_1ua'' = (x,y)u_1u\otimes a'' = (xu_1u, yu_1u)\otimes a'' = (x'v_2v, y'v_2v)\otimes a'' = (x',y')v_2v\otimes a'' = (x',y')\otimes v_2va'' = (x',y')\otimes v_2a_2 = (x',y')\otimes a'$． //

强平坦系的概念是由 B. Stenstrom 于 1971 年引入的，其原始定义为：函子 $-\otimes A$ 把 Act-S 中的拉回图与均衡图变为 Set 中的拉回图与均衡图．拉回平坦的概念是由 Normak 于 1987 年引入的．Bulman-Fleming 于 1991 年证明了拉回平坦实际上就是强平坦，即定理 4.2，所以以后不加区分地使用强平坦和拉回平坦的概念．

定理 4.3 投射系是强平坦系．

证明 设 A 是投射系，不妨假定 $A = \coprod_{i\in I} Se_i, e_i \in E(S)$．设 $s, s' \in S, a,a' \in A$，满足 $sa = s'a'$．由 A 的结构可知存在 $i \in I$，使得 $a = ue_i, a' = ve_i$．所以

$$a = ue_i \cdot e_i, \quad a' = ve_i \cdot e_i, \quad sue_i = s've_i,$$

即 A 满足条件(P)．同理可以证明 A 满足条件(E)．所以由定理 4.2 即知 A 是强平坦系． //

推论 4.4 投射系是均衡平坦的.

引理 4.5 设左 S- 系 A 满足条件(P),如果 $a_i \in A, S_i, t_i \in S$, $i = 1, \cdots, n$,满足 $s_i a_i = t_i a_{i+1} (i = 1, \cdots, n)$,那么存在 $u_i, v_i \in S, i = 1, \cdots, n, a \in A$,使得

$$a_i = u_i a, \qquad a_{i+1} = v_i a,$$
$$s_i u_i = t_i v_i, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

证明 利用数学归纳法容易证明. //

命题 4.6 设 S- 系 A 满足条件(E),则如下两条等价:

(1) A 是强平坦的;

(2) 若 a', a'' 是 A 的同一个不可分分量中的元素,则存在 $a \in A, u, v \in S$,使得 $a' = ua, a'' = va$.

证明 (1)⇒(2) 设 A 是强平坦的,则 A 满足条件(P). 若 a', a'' 在 A 的同一个不可分分量中,则由命题 1.3.6 知存在 $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S, a_1, \cdots, a_{n-1} \in A$,使得

$$s_1 a' = t_1 a_1,$$
$$s_2 a_1 = t_2 a_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$s_n a_{n-1} = t_n a''.$$

由引理 4.5 知存在 $u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S, a \in A$,使得

$$a' = u_1 a, \qquad a_1 = v_1 a, \qquad s_1 u_1 = t_1 v_1,$$
$$a_1 = u_2 a, \qquad a_2 = v_2 a, \qquad s_2 u_2 = t_2 v_2,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$a_{n-1} = u_n a, \qquad a'' = v_n a, \qquad s_n u_n = t_n v_n.$$

由此即知(2) 成立.

(2)⇒(1) 由定理 4.2,只需证明 A 满足条件(P) 即可. 设 $s, t \in S, a, a' \in A$ 满足 $sa = ta'$,则由(2) 知存在 $a'' \in A, u, v \in S$,使得 $a = ua'', a' = va''$. 所以有 $sua'' = tva''$. 由条件(E) 知存在 $x \in S, a_1 \in A$,使得 $a'' = xa_1, sux = tvx$. 所以, $a = ua'' = uxa_1, a' = va'' = vxa_1$,即 A 满足条件(P). //

定理 4.7 设 $A = Sa$ 是循环 S- 系,则 A 是强平坦的当且仅

当 A 满足条件(E).

证明 只需证明充分性.

设 A 满足条件(E),由定理 4.2 只需证明 A 满足条件(P) 即可.

设 $s,t \in S,b,b' \in A$,满足 $sb = tb'$. 因为 $b = ua,b' = va,u,v \in S$,所以 $sua = tva$,由条件(E) 知存在 $x \in S,b'' = pa \in A$,使得 $sux = tvx,a = xpa$. 由此即知 A 满足条件(P). //

推论 4.8 设 $A = Sa$ 是循环 S- 系,则 A 是强平坦的当且仅当对于 $s,t \in S$,如果 $sa = ta$,那么存在 $u \in S$,使得 $su = tu$,且 $a = ua$.

证明 由定理 4.7 及其证明即得. //

由定理 2.11 即得

定理 4.9 所有 S- 系都是强平坦的当且仅当 $S = \{1\}$.

由定理 3.16 和定理 4.7 得

定理 4.10 所有循环 S- 系都是强平坦的当且仅当 $S = \{1\}$,或 $S = \{1,0\}$.

定义 4.11 称幺半群 S 是左 PSF 幺半群,如果 S 的任意主左理想作为 S- 系是强平坦的.

因为投射系是强平坦系,所以左 PP 幺半群一定是左 PSF 的. 因此,正则幺半群和右可消幺半群都是左 PSF 的.

关于左 PP 幺半群的研究成果已非常丰富. 但是对于左 PSF 幺半群,自从[120] 中引入以来,只有少数研究成果出现(见下一节及第五章 §3, §5 等),希望对这类半群能有更多的研究成果面世.

定义 4.12 设 S 是幺半群,$u \in S$. 称 u 是右半可消的,如果对于 $s,t \in S$,若 $su = tu$,则存在 $r \in S$,使得 $ru = u,sr = tr$.

显然,S 中的 e- 可消元都是右半可消的.

定理 4.13 如下几条是等价的:

(1) S 是左 PSF 幺半群;

(2) S 的任意主左理想可由右半可消元生成;

(3) S 的任意元素都是右半可消元.

证明 (1)⇒(3) 取 $u \in S$,设 $s,t \in S$ 满足 $su = tu$. 因为 Su 是强平坦的,所以满足条件(E),故存在 $v \in Su, p \in S$,使得 $u = pv, sp = tp$. 而 $v = qu$,这里 $q \in S$. 所以有 $u = pqu, spq = tpq$. 这说明 u 是 S 的右半可消元.

(3)⇒(2) 显然.

(2)⇒(1) 由推论 4.8 即得. //

同理可以定义并讨论右 PSF 幺半群以及左半可消元.

§5 弱平坦性

定义 5.1 称 S- 系 A 是弱平坦的,如果对于 S 的任意右理想 I,映射 $I \otimes A \to S \otimes A$ 是单的. 称 S- 系 A 是主弱平坦的,如果对于 S 的任意主右理想 I,映射 $I \otimes A \to S \otimes A$ 是单的.

显然,平坦系一定是弱平坦的,弱平坦系一定是主弱平坦的.

因为 $S \otimes A \simeq A$,所以 A 是(主)弱平坦的当且仅当对于任意(主)右理想 I,映射 $I \otimes A \xrightarrow{f} A, f(x \otimes a) = xa$,是单的.

定理 5.2 对于 S- 系 A,如下三条是等价的:

(1) A 是弱平坦的;

(2) A 是主弱平坦的,且对于 S 的任意右理想 I,J, $IA \cap JA = (I \cap J)A$;

(3) A 是主弱平坦的,且对于任意 $x,y \in S$,任意 $a,a' \in A$,若 $xa = ya'$,则存在 $a'' \in A, z \in xS \cap yS$,使得 $xa = ya' = za''$.

证明 (1)⇒(3) 设 $xa = ya', x,y \in S, a,a' \in A$,则在 $S \otimes A$ 中有 $x \otimes a = y \otimes a'$. 由 A 的弱平坦性可知在 $(xS \cup ys) \otimes A$ 中有 $x \otimes a = y \otimes a'$,所以存在 $x_1,\cdots,x_n \in xS \cup ys, a_2,\cdots,a_n \in A$, $u_1,v_1,\cdots,u_n,v_n \in S$,使得

$$x = x_1u_1,$$

$$x_1v_1 = x_2u_2, \qquad u_1a = v_1a_2,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$x_nv_n = y, \qquad u_na_n = v_na'.$$

令 $z_1 = x, z_i = x_{i-1}v_{i-1}, i = 2, \cdots, n+1$. 显然存在 $k \in \{1, \cdots, n+1\}$,使得 $z_k \in xS \cap ys$. 令 $a'' = a_k \in A$,则利用上述等式组计算可知 $xa = ya' = z_1a = z_{n+1}a' = z_ka_k = z_ka''$.

(3)⇒(2)　对于 S 的任意右理想 I, J,显然有 $(I \cap J)A \subseteq IA \cap JA$. 设 $xa = ya' \in IA \cap JA$,这里 $x \in I, y \in J, a, a' \in A$,由(3)知存在 $z \in xS \cap yS, a'' \in A$,使得 $xa = ya' = za''$. 显然 $z \in I \cap J$,所以 $xa \in (I \cap J)A$. 从而 $(I \cap J)A = IA \cap JA$.

(2)⇒(3)　显然.

(3)⇒(1)　设 $x, y \in S, a, a' \in A$,满足 $x \otimes a = y \otimes a'$(在 $S \otimes A$ 中). 要证明在 $(XS \cup YS) \otimes A$ 中有 $x \otimes a = y \otimes a'$. 容易证明(利用定理 1.2)$xa = ya'$. 由(3)即知存在 $z \in xS \cap yS, a'' \in A$,使得 $xa = ya' = za''$. 显然在 $S \otimes A$ 中有 $x \otimes a = z \otimes a'', y \otimes a' = z \otimes a''$,所以在 $xS \otimes A$ 中有 $x \otimes a = z \otimes a''$,在 $yS \otimes A$ 中有 $y \otimes a' = z \otimes a''$,从而在 $(xS \cup yS) \otimes A$ 中有 $x \otimes a = z \otimes a'' = y \otimes a'$. 因此 A 是弱平坦的.　//

当 S 是右 PSF 幺半群时,主弱平坦系有如下的等价刻画.

定理 5.3　设 S 是右 PSF 幺半群,A 是 S- 系则如下两条是等价的:

(1) A 是主弱平坦的;

(2) 对任意 $a, a' \in A, x \in S$,若 $xa = xa'$,则存在 $u \in S$,使得 $x = xu, ua = ua'$.

证明　(1)⇒(2)　设 $a, a' \in A, x \in S$ 满足 $xa = xa'$,则在 $S \otimes A$ 中有 $x \otimes a = x \otimes a'$. 因为 A 是主弱平坦的,所以在 $xS \otimes A$ 中有 $x \otimes a = x \otimes a'$. 由命题 2.12 知存在 $a_1, \cdots, a_n \in A, s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S, u_2, \cdots, u_n \in S$,使得

$$a = s_1a_1,$$

$$xs_1 = xu_2t_1, \qquad t_1a_1 = s_2a_2,$$
$$xu_2s_2 = xu_3t_2, \qquad t_2a_2 = s_3a_3,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$xu_ns_n = xt_n, \qquad t_na_n = a'.$$

因为 S 是右 PSF 幺半群,所以由定理 4.13 知 X 是 S 的左半可消元. 因此由等式 $xs_1 = xu_2t_1$ 知存在 $v_1 \in S$,使得 $x = xv_1, v_1s_1 = v_1u_2t_1$. 所以 $xv_1u_2s_2 = xu_2s_2 = xu_3t_2 = xv_1u_3t_2$. 由 x 的左半可消性知存在 $v_2 \in S$,使得 $x = xv_2, v_2v_1u_2s_2 = v_2v_1u_3t_2$. 令 $v_1' = v_2v_1$,则 $x = xv_1', v_1's_1 = v_1'u_2t_1, v_1'u_2s_2 = v_1'u_3t_2$. 利用数学归纳法可以证明存在 $v \in S$,使得

$$x = xv, \quad vs_1 = vu_2t_1, \quad vu_ns_n = vt_n,$$
$$vu_is_i = vu_{i+1}t_i, \quad i = 2, \cdots, n-1.$$

因此,$va = vs_1a_1 = vu_2t_1a_1 = vu_2s_2a_2 = \cdots = vu_ns_na_n = vt_na_n = va'$.

(2)⇒(1) 设 $a, a' \in A, x \in S$ 满足 $x \otimes a = x \otimes a'$(在 $S \otimes A$ 中). 容易证明 $xa = xa'$. 所以由(2)知存在 $u \in S$,使得 $x = xu$, $ua = ua'$. 因此在 $xS \otimes A$ 中有

$$x \otimes a = xu \otimes a = x \otimes ua = x \otimes ua'$$
$$= xu \otimes a' = x \otimes a'.$$

即 A 是主弱平坦的. //

推论 5.4 设 S 是右 PP 幺半群,A 是 S- 系,则如下两条是等价的:

(1) A 是主弱平坦的;

(2) 对任意 $a, a' \in A, x \in S$,若 $xa = xa'$,则存在 $u \in E(S)$,使得 $x = xu, ua = ua'$.

证明 (2)⇒(1) 显然.

(1)⇒(2) 设 $xa = xa'$. 由定理 5.3 知存在 $v \in S$,使得 $x = xv, va = va'$. 由命题 2.5.1 知存在幂等元 $u \in S$,使得 $x = xu, u = uv$,所以 $ua = uva = uva' = ua'$. //

当 S 是右 PSF 幺半群时,弱平坦系有如下的等价刻画.

定理 5.5 设 S 是右 PSF 幺半群，A 是 S-系，则如下两条是等价的：

(1) A 是弱平坦的；

(2) 对任意 $a,a'\in A$，任意 $x,y\in S$，若 $xa=ya'$，则存在 $a''\in A,x_1,y_1,u,v\in S$，使得

$$xu=x,\quad yv=y,\quad xx_1=yy_1,$$
$$ua=x_1a'',\quad va'=y_1a''.$$

证明 (1)⇒(2) 设 $x,y\in S,a,a'\in A$ 满足 $xa=ya'$。由定理 5.2 知存在 $a''\in A,z=xs=yt\in xS\cap yS$，使得 $xa=ya'=za''$。因为 $xa=za''=xsa''$，所以由定理 5.3 知存在 $u\in S$，使得 $x=xu,ua=usa''$。同理由 $ya'=yta''$ 知存在 $v\in S$，使得 $y=yv$，$va'=vta''$。令 $x_1=us,y_1=vt$，则 $ua=x_1a'',va'=y_1a''$，且 $xx_1=xus=xs=yt=yvt=yy_1$。

(2)⇒(1) 设 $a,a'\in A,x,y\in S$，在 $S\otimes A$ 中有 $x\otimes a=y\otimes a'$，则 $xa=ya'$。由(2)知存在 $a''\in A,x_1,y_1,u,v\in S$，使得 $x=xu,y=yv,xx_1=yy_1,ua=x_1a'',va'=y_1a''$。所以在 $(xS\cup yS)\otimes A$ 中有

$$\begin{aligned}x\otimes a&=xu\otimes a=x\otimes ua=x\otimes x_1a''=xx_1\otimes a''\\&=yy_1\otimes a''=y\otimes y_1a''=y\otimes va'=yv\otimes a'\\&=y\otimes a'.\end{aligned}$$

因此 A 是弱平坦的. //

推论 5.6 设 S 是右 PP 幺半群，A 是 S-系，则如下两条是等价的：

(1) A 是弱平坦的；

(2) 对于任意 $a,a'\in A$，任意 $x,y\in S$，若 $xa=ya'$，则存在 $a''\in A,x_1,y_1\in S,u,v\in E(S)$，使得 $x=xu,y=yv,xx_1=yy_1,ua=x_1a'',va'=y_1a''$。

证明 (2)⇒(1) 由定理 5.5 知是显然的.

(1)⇒(2) 由定理 5.5 知存在 $a''\in A,x_1,y_1,u,v\in S$，使得 $x=xu,y=yv,xx_1=yy_1,ua=x_1a'',va'=y_1a''$。又因 xS,yS 是

投射的，所以存在幂等元 e,f，使得 $x=xe, y=yf, e=eu, f=fv$. 令 $p=ex_1, q=fy_1$，则 $ea=eua=ex_1a''=pa'', fa'=fva'=fy_1a''=qa'', xp=xex_1=xx_1=yy_1=yfy_1=yq$. //

当 S 是正则幺半群时，S-系的弱平坦性的等价刻画较为简单. 为此先证明下面的重要定理. 该定理利用 S-系的主弱平坦性给出了正则幺半群的等价刻画.

定理 5.7 如下三条是等价的：

(1) S 是正则幺半群；

(2) 所有 S-系是主弱平坦的；

(3) 所有循环 S-系是主弱平坦的.

证明 (1)⇒(2) 因为正则幺半群是右 PP 的，所以可利用推论 5.4 来证明本结论. 设 A 是任意 S-系，$a,a'\in A, x\in S$，满足 $xa=xa'$. 令 $u=x'x$，其中 $x'\in V(x)$，则 $u\in E(S), x=xx'x=xu, ua=x'xa=x'xa'=ua'$.

(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(1) 设 $s\in S$，若 $s=s^2$，则 s 是正则元. 下设 $s\neq s^2$. 记 λ 为由 (s,s^2) 生成的 S 的最小左同余. 在张量积 $S\otimes S/\lambda$ 中显然有 $s\otimes 1\lambda=s^2\otimes 1\lambda$. 利用循环 S-系 S/λ 的主弱平坦性可知在 $sS\otimes S/\lambda$ 中有 $s\otimes 1\lambda=s^2\otimes 1\lambda$. 所以存在 $u_1,v_1,\cdots,u_n,v_n\in S, b_2,\cdots,b_n\in S/\lambda, s_1,\cdots,s_n\in sS$，使得

$$
\begin{aligned}
&s=s_1u_1, \\
&s_1v_1=s_2u_2, \qquad && u_1 1\lambda=v_1b_2, \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots \\
&s_nv_n=s^2, && u_nb_n=v_n1\lambda.
\end{aligned}
$$

设 $b_i=w_i\lambda\in S/\lambda, i=2,\cdots,n$，则 $(u_1,v_1w_2)\in\lambda,\cdots,(u_nw_n,v_n)\in\lambda$. 若 $u_1=v_1w_2,\cdots,u_nw_n=v_n$，则容易证明 $s=s^2$，矛盾. 设 $u_1=v_1w_2,\cdots,u_iw_i=v_iw_{i+1}$，但 $u_{i+1}w_{i+1}\neq v_{i+1}w_{i+2}$，则存在 $t\in S$，使得 $u_{i+1}w_{i+1}=ts$. 所以 $s=s_1u_1=s_1v_1w_2=\cdots=s_iv_iw_{i+1}=s_{i+1}u_{i+1}w_{i+1}=s_{i+1}ts\in sSs$，即 s 是正则元. //

定理 5.8 设 S 是正则幺半群，A 是 S-系，则 A 是弱平坦的当且仅当：对于任意 $x,y\in S$，任意 $a\in A$，若 $xa=ya$，则存在 $z\in xS\cap yS$，使得 $xa=ya=za$.

证明 ⇒) 设 $xa=ya$，则由定理 5.2 知存在 $a''\in A, z_1\in xS\cap yS$，使得 $xa=ya=z_1a''$. 取 $z_1'\in V(z_1)$，令 $z=z_1z_1'x$，则 $z\in xS\cap yS$，且 $za=z_1z_1'xa=z_1z_1'z_1a''=z_1a''=xa=ya$.

⇐) 设 A 满足所给条件，下证 A 是弱平坦的. 由定理 5.7 知 A 是主弱平坦的. 设 $x,y\in S, a,a'\in A$ 满足 $xa=ya'$. 令 $a''=xa=ya'$，取 $x'\in V(x), y'\in V(y)$，则有 $a''=xx'xa=xx'a''=yy'a''$. 所以由条件知存在 $z\in xx'S\cap yy'S=xS\cap yS$，使得 $xx'a''=yy'a''=za''$. 所以 $xa=ya'=za''$. 由定理 5.2 即知 A 是弱平坦的. //

当 S 是左可消幺半群时，S 为右 PSF 幺半群，此时 S-系的主弱平坦性和弱平坦性也有较为简单的刻画. 先引入如下的概念.

定义 5.9 设 A 是 S-系. 称 A 是挠自由的，如果对于任意 $a,b\in A$，任意左可消元 $s\in S$，若 $sa=sb$，则 $a=b$.

一个基本的结果是：

定理 5.10 主弱平坦系是挠自由的.

证明 设 A 是主弱平坦系，$a,b\in A, s\in S$ 且 s 是左可消元，满足 $sa=sb$. 容易证明在 $S\otimes A$ 中有 $s\otimes a=s\otimes b$. 所以在 $sS\otimes A$ 中有 $s\otimes a=s\otimes b$. 因此存在 $s_1,\cdots,s_n\in sS, a_2,\cdots,a_n\in A, u_1,v_1,\cdots,u_n,v_n\in S$，使得

$$
\begin{aligned}
&s=s_1u_1, \\
&s_1v_1=s_2u_2, \qquad && u_1a=v_1a_2, \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots \\
&s_nv_n=s, && u_na_n=v_nb.
\end{aligned}
$$

设 $s_i=st_i, t_i\in S, i=1,\cdots,n$，则由 s 的左可消性得 $t_1u_1=1, t_nv_n=1, t_iv_i=t_{i+1}u_{i+1}, i=1,\cdots,n$. 所以，$a=1\cdot a=t_1u_1a=t_1v_1a_2=t_2u_2a_2=\cdots=t_nu_na_n=t_nv_nb=1b=b$，即 A 是挠自由的. //

定理 5.11 设 S 是左可消幺半群，A 是 S- 系，则 A 是主弱平坦的当且仅当 A 是挠自由的.

证明 若 A 是主弱平坦的，则由定理 5.9 知 A 是挠自由的. 反过来，假定 A 是挠自由的. 设 $a, a' \in A, x \in S$ 满足 $xa = xa'$，则 $a = a'$. 所以由定理 5.3 知 A 是主弱平坦的. //

定理 5.12 设 S 是左可消幺半群，A 是 S- 系，则 A 是弱平坦的当且仅当 A 满足条件(P).

证明 若 A 满足条件(P)，则 A 是弱平坦的. 反过来，假定 A 是弱平坦的. 设 $x, y \in S, a, a' \in A$ 满足 $xa = ya'$. 由定理 5.5 知存在 $a'' \in A, x_1, y_1, u, v \in S$，使得 $xu = x, yv = y, xx_1 = yy_1, ua = x_1a'', va' = y_1a''$. 由 S 的左可消性知 $u = 1, v = 1$. 所以 $a = x_1a''$, $a' = y_1a'', xx_1 = yy_1$，即 A 满足条件(P). //

定理 5.7 给出了所有 S- 系都是主弱平坦系的幺半群的内部特征. 关于所有 S- 系都是弱平坦系的幺半群，和所有 S- 系都是挠自由系的幺半群，有如下的特征刻画：

定理 5.13 对于幺半群 S，以下三条等价：

(1) 所有 S- 系是弱平坦的；

(2) 所有循环 S- 系是弱平坦的；

(3) S 是正则幺半群，且对任意 $x, y \in S$，存在 $z \in xS \cap yS$，使得 $(z, x) \in \lambda(x, y)$，这里 $\lambda(x, y)$ 是 S 上的由 (x, y) 生成的最小左同余.

证明 (1)⇒(2) 显然.

(2)⇒(3) 由定理 5.7 知 S 是正则幺半群. 对于任意 $x, y \in S$, $S/\lambda(x, y)$ 是弱平坦系. 因为 $x\lambda = y\lambda$，即 $x \cdot 1\lambda = y \cdot 1\lambda$，所以由定理 5.8 知存在 $z \in xS \cap yS$，使得 $x \cdot 1\lambda = y \cdot 1\lambda = z \cdot 1\lambda$，所以 $(z, x) \in \lambda(x, y)$.

(3)⇒(1) 设 A 是任意 S- 系，则由定理 5.7 知 A 是主弱平坦的. 设 $a \in A, x, y \in S$ 满足 $xa = ya$. 定义 S 上的左同余 ρ 如下：

$$s\rho t \Leftrightarrow sa = ta.$$

显然 $(x, y) \in \rho$，所以 $\lambda(x, y) \subseteq \rho$. 由(3) 知存在 $z \in xS \cap yS$，使

得$(z,x)\in\lambda(x,y)$,所以$(z,x)\in\rho$,因此$xa=ya=za$.由定理5.8即知A是弱平坦的. //

定理5.14 对于幺半群S,以下三条等价:

(1) 所有S-系都是挠自由的;

(2) 所有满足条件(E)的S-系是挠自由的;

(3) S的任意左可消元是左可逆元.

证明 (1)⇒(2) 显然.

(2)⇒(3) 设r是S的左可消元.若$Sr=S$,则r是左可逆元.设$Sr\neq S$.由§3知$A(Sr)$满足条件(E).所以$A(Sr)$是挠自由的.但是,

$$r(1,x)=(r,z)=r(1,y),$$

而$(1,x)\neq(1,y)$.这和挠自由性矛盾.所以任意左可消元是左可逆元.

(3)⇒(1) 设A是S-系,$a,b\in A$,$r\in S$是左可消元,$ra=rb$.因为r是左可逆元,所以存在$r'\in S$,使得$r'r=1$.因此$a=b$,即A是挠自由的. //

带B称为是右正则带,如果对任意$x,y\in B$,有$xyx=yx$.显然右正规带(满足$xyz=yxz$)是右正则带.下面的定理刻画了所有S-系都是弱平坦系的幂等元幺半群.

定理5.15 设S是幂等元幺半群,则以下两条是等价的:

(1) 所有S-系都是弱平坦的;

(2) S是右正则带.

证明 (2)⇒(1) 设$x,y\in S$.令$z=xyx=yx\in xS\cap yS$,因为$x\lambda(x,y)y$,所以$z=xyx\lambda(x,y)xy\lambda(x,y)x$,即$(z,x)\in\lambda(x,y)$.由定理5.13即知所有$S$-系是弱平坦的.

(1)⇒(2) 设$S=\dot{\bigcup}_{\alpha\in\Gamma}S_\alpha$,其中$\Gamma$是半格,每个$S_\alpha$是矩形带.为证$S$是右正则带,只需证明每个$S_\alpha$是右零带即可.取定$\alpha\in\Gamma$,设$x,y\in S_\alpha$.由定理5.13知存在$z\in xS\cap yS$,使得$(z,x)\in\lambda(x,y)$.所以$z=x$或者存在$u_1,\cdots,u_n,x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n\in S$,使得$\{x_i,y_i\}$

$=\{x,y\}, i=1,\cdots,n$，且

$$\begin{aligned}
x &= u_1x_1,\\
u_1y_1 &= u_2x_2,\\
&\cdots\cdots\\
u_ny_n &= z.
\end{aligned}$$

容易证明 $z\in S_\alpha$. 所以由矩形带的性质可知 $xy=xyzy=xzy=yzy=yy=y$，即 S_α 是右零带. //

已知弱平坦系是主弱平坦的，主弱平坦系是挠自由的. 由定理 5.13，5.14，5.7 可知挠自由系可以不是主弱平坦的，主弱平坦系也可以不是弱平坦的. 例如，取 S 为不是右正则带的幂等元幺半群，则由定理 5.7 知所有 S- 系是主弱平坦的，但由定理 5.15 知存在非弱平坦的 S- 系. 取 N 为左零半群且 $|N|\geqslant 2$，T 为非正则半群，令 $S=N\dot{\cup}T\dot{\cup}\{1\}$，规定 S 中的运算为

$$nt=tn=t,\quad \forall\, n\in N, \forall\, t\in T,$$

其他元素的运算按照以前的定义，则 S 是幺半群，显然 S 中的左可消元只有 1，所以由定理 5.14 知所有 S- 系都是挠自由的，但由定理 5.7 知存在非主弱平坦的 S- 系.

弱平坦系可以不是平坦的. 例如，令 S 是右正规带，但 S 不具有常值结构映射. 由定理 5.15 知所有 S^1- 系是弱平坦的，在第五章 § 4 中将要证明存在非平坦的 S^1- 系.

本章引入的平坦性概念及第二章的投射性概念之间的关系可用下图示之.

自由 ⇒ 投射 ⇒ 强平坦 ↗ 条件 (P) ↘ 平坦 ⇒弱平坦
强平坦 ↘ 均衡平坦 ↗ 平坦
均衡平坦 ⇓ 条件(E)
弱平坦 ⇓ 主弱平坦 ⇓ 挠自由

上图中所有箭头的逆都不成立：条件(P)$\not\Rightarrow$强平坦的例子在 § 2 中给出；均衡平坦 $\not\Rightarrow$强平坦的例子见例 3.17；由定理 4.2 可知例

3.17 也说明平坦 $\not\Rightarrow$ 条件(P);例 3.18 说明平坦 $\not\Rightarrow$ 均衡平坦,例 3.8 说明条件(E) $\not\Rightarrow$ 平坦,从而条件(E) $\not\Rightarrow$ 均衡平坦;平坦性 $\not\Rightarrow$ 条件(E)的理由是:否则,条件(P) $\Rightarrow$ 条件(E),从而条件(P) $\Longrightarrow$ 强平坦. 矛盾. 挠自由 $\not\Rightarrow$ 主弱平坦 $\not\Rightarrow$ 弱平坦 $\not\Rightarrow$ 平坦的例子见本节;投射 $\not\Rightarrow$ 自由的例子见第二章;强平坦 $\not\Rightarrow$ 投射性由第五章 §9 保证.

§6　方程组的可解性与 R- 纯同态

在第三章 §3 中,研究了只有一个未定元的方程组,下面考虑方程个数有限的方程组. 设 A,B 是右 S- 系,且 $A \leqslant B$.

根据 Normak[127] 和 Gorld[53],称 A 在 B 中是 NG- 纯的,如果对于 A 上的任意方程个数有限的方程组 $\sum$,若 $\sum$ 在 B 中有解,则 $\sum$ 在 A 中一定有解. 称 A 是绝对 NG- 纯的,如果 A 在任意扩张系中是 NG- 纯的. 显然 A 是绝对 NG- 纯的当且仅当 A 上的任意方程个数有限的容许方程组在 A 中有解. Gould[53,54,59,60] 中对 NG- 纯性和绝对 NG- 纯右 S- 系作了大量的研究.

设 A,B 是右 S- 系,$f:A \to B$ 是 S- 单同态. 根据 Renshaw[131,132,133],称 f 是 R- 纯的,如果对所有的左 S- 系 X,映射 $f \otimes 1:A \otimes X \to B \otimes X, a \otimes x \mapsto f(a) \otimes x$ 总是单的.

设 R 是环,在 R- 模范畴中,NG- 纯性和 R- 纯性对应的概念是一致的,即单同态 $f:A \to B$ 是 R- 纯的当且仅当 $f(A)$ 在 B 中是 NG- 纯的. 本节考虑在右 S- 系范畴 Act-S 中,NG- 纯性和 R- 纯性的关系,结果表明在 Act-S 中,NG- 纯性严格强于 R- 纯性. 本节的结果选自[114].

设 S 是幺半群 T 的子幺半群. 称 S 在 T 中具有左扩张性质,如果对所有左 S- 系 A,映射 $A \to T \otimes_S A: a \mapsto 1 \otimes a$ 是单的. 称 S 具有左绝对扩张性质,如果 S 在所有包含 S 为子幺半群的幺半群中

具有左扩张性质. 例如当所有左S-系都是平坦系时，S具有左绝对扩张性质，此时任意S-单同态都是R-纯的.

定理6.1 设A,B是右S-系，$f:A\to B$是S-单同态. 若$f(A)$在B中NG-纯，则f是R-纯的.

证明 设M是S-系，$m,m'\in M$，$a,a'\in A$，在$B\otimes M$中有$f(a)\otimes m=f(a')\otimes m'$. 所以存在$s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$，$m_2,\cdots,m_n\in M$，$a_1,\cdots,a_n\in B$，使得

$$\begin{array}{ll} f(a)=a_1s_1, & \\ a_1t_1=a_2s_2, & s_1m=t_1m_2, \\ a_2t_2=a_3s_3, & s_2m_2=t_2m_3, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_nt_n=f(a'), & s_nm_n=t_nm'. \end{array} \qquad (*)$$

考虑$f(A)$上的方程组

$$\sum=\{x_1s_1=f(a),x_nt_n=f(a')\}$$
$$\cup\{x_it_i=x_{i+1}s_{i+1}\,|\,i=1,\cdots,n-1\},$$

由$(*)$可知$\sum$在B中有解$a_1,\cdots,a_n$. 所以由条件知$\sum$在$f(A)$中有解，即存在$c_1,\cdots,c_n\in A$，使得

$$f(c_1)s_1=f(a),f(c_n)t_n=f(a'),$$
$$f(c_i)t_i=f(c_{i+1})s_{i+1},i=1,\cdots,n-1.$$

由f的单性可知有

$$c_1s_1=a,c_nt_n=a',c_it_i=c_{i+1}s_{i+1},i=1,\cdots,n-1.$$

所以由$(*)$可知在$A\otimes M$中有$a\otimes m=c_1s_1\otimes m=c_1\otimes s_1m=c_1\otimes t_1m_2=c_1t_1\otimes m_2=c_2s_2\otimes m_2=\cdots=c_ns_n\otimes m_n=c_n\otimes s_nm_n=c_n\otimes t_nm'=c_nt_n\otimes m'=a'\otimes m'$. 因此映射$A\otimes M\to B\otimes M$是单的. 故$f:A\to B$是$R$-纯的. //

设S是幺半群T的子幺半群，且S的幺元即为T的幺元，则T可看成是右S-系. 若存在右S-同态$\varphi:T\to T$，使得

(1) $\varphi^2=\varphi,\varphi(1)=1$，

(2) 关于任意$s\in S$，任意$t\in T$，若$ts\in S$，则$\varphi(t)\in S$，

则称 S 在 T 中是右拟一致的.

显然,[132] 中的几乎一致是右拟一致的.

命题6.2 设幺半群 S 在幺半群 T 中是右拟一致的,则 S 在 T 中具有左扩张性质.

证明 设 A 是任意左 S-系. 要证明 $S\otimes A\to T\otimes A$ 是单的. 设 $a,a'\in A,s,s'\in S$,使得在 $T\otimes A$ 中有 $s\otimes a=s'\otimes a'$,则存在 $u_1,v_1,\cdots,u_n,v_n\in S,a_2,\cdots,a_n\in A,t_1,\cdots,t_n\in T$,使得

$$
\begin{aligned}
&s=t_1u_1, & \\
&t_1v_1=t_2u_2, & u_1a=v_1a_2,\\
&\cdots\cdots & \cdots\cdots\\
&t_nv_n=s', & u_na_n=v_na'.
\end{aligned}
$$

因为 S 在 T 中是右拟一致的,故存在 S-同态 $\varphi:T\to T$,满足条件(1),(2). 易知对任意 $s\in S$ 都有 $\varphi(s)=s$. 因为 $t_1u_1=s\in S$,所以由(2) 知 $\varphi(t_1)\in S$. 再由 $t_1v_1=t_2u_2$ 知 $\varphi(t_2)u_2=\varphi(t_2u_2)=\varphi(t_1v_1)=\varphi(t_1)v_1\in S$,故由(2) 知 $\varphi(t_2)=\varphi(\varphi(t_2))\in S$.

同理可以证明 $\varphi(t_3)\in S,\cdots,\varphi(t_n)\in S$. 所以在 $S\otimes A$ 中有

$$
\begin{aligned}
s\otimes a&=\varphi(s)\otimes a=\varphi(t_1u_1)\otimes a=\varphi(t_1)u_1\otimes a\\
&=\varphi(t_1)\otimes u_1a=\varphi(t_1)\otimes v_1a_2=\varphi(t_1)v_1\otimes a_2\\
&=\varphi(t_1v_1)\otimes a_2=\varphi(t_2u_2)\otimes a_2=\cdots\\
&=\varphi(t_nu_n)\otimes a_n=\varphi(t_n)u_n\otimes a_n=\varphi(t_n)\otimes u_na_n\\
&=\varphi(t_n)\otimes v_na'=\varphi(t_n)v_n\otimes a'=\varphi(t_nv_n)\otimes a'\\
&=\varphi(s')\otimes a'=s'\otimes a'.
\end{aligned}
$$

利用同构 $A\simeq S\otimes A$ 即知 S 在 T 中具有左扩张性. //

现在可以给出例子说明定理 6.1 的逆不成立.

例6.3 设 S 是群且 $|S|\geqslant 2$,R 是任意半群. 令 $T=S\dot{\cup}R$,规定 T 的乘法为:$sr=rs=r,r\in R,s\in S$;S 中的元素或 R 中的元素相乘时按原来的定义,则 T 是幺半群,且 T 的幺元即为 S 的幺元. 令 $\varphi:T\to T$ 是恒等自同态,则(1) 显然成立. 对任意 $s\in S$,任意 $t\in T$,若 $t\in S$,则 $\varphi(t)=t\in S$. 若 $t\in R$,则 $ts=t\notin S$. 所以条

件(2) 亦成立. 所以 S 是 T 的右拟一致子幺半群. 由命题 6.2 知 S 在 T 中具有左扩张性质,所以作为右 S- 系,包含同态 $S \to T$ 是 R- 纯的. 但 S 在 T 中不是 NG- 纯的. 事实上,考虑方程

$$xs = xs', \quad s, s' \in S,$$

这里 $s \neq s'$. 此方程在 T 中有解(取 $r \in R$,则 $rs = r = rs'$),但它在 S 中没有解.

如果所有右 S- 单同态都是 R- 纯的,则称 S 为右绝对 R- 纯的,下面的例子表明,即使 S 是右绝对 R- 纯的,定理 6.1 的逆也不成立.

例 6.4 设 S 是有限右群且 $|S| \geqslant 2$,易知 S^1 是左绝对平坦幺半群. 设 $f: A \to B$ 是任意右 S^1- 单同态,则对任意左 S^1- 系 M,映射 $f \otimes 1: A \otimes M \to B \otimes M$ 总是单的. 所以 S^1 是右绝对 R- 纯的. 如果对于 S^1,定理 6.1 的逆成立,那么对于任意右 S^1- 系 B,若 $S^1_{S^1} \leqslant B$,则 $S^1_{S^1}$ 在 B 中是 NG- 纯的. 因此 $S^1_{S^1}$ 是绝对 NG- 纯的. 由引理 3.3.9 知存在 $y \in S^1$,使得对任意 $x \in S^1$,有 $y = yx$. 显然这与 S^1 的取法矛盾. 所以定理 6.1 的逆不成立.

命题 6.5 幺半群 S 是绝对 NG- 纯的当且仅当 S 在任意扩张幺半群中是 NG- 纯的.

证明 显然只需证明充分性. 设右 S- 系 A 以 S_S 为子系, $\sum$ 是 S_S 上的有限方程组,它在 A 中有解. 令 $T = A \cup S$,规定乘法为: $a_1a_2 = a_2, sa = a, a, a_1, a_2 \in A, s \in S$; S 中的元相乘以及 S 中的元右乘 A 中的元皆按原来的定义. 易知 T 是幺半群. 显然 $\sum$ 在 A 中的解即为 $\sum$ 在 T 中的解. 所以由条件可知 $\sum$ 在 S_S 中有解. 因此 S_S 是绝对 NG- 纯的. //

设 A, B, C 为左 S- 系, $f: A \to B, g: B \to C$ 为 S- 同态. 称 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 是关系正合序列,如果 $\rho_f = (\mathrm{Im}f \times \mathrm{Im}f) \cup 1_B = \mathrm{Ker}g$. 若 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 和 $B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ 都是关系正合序列,

则称 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ 也是关系正合序列. 对集合及映射也可类似地定义关系正合序列，以下总是以 Z 表示只有一个元素的左 S- 系.

引理 6.6 (1) $Z \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B$ 是关系正合序列 $\Leftrightarrow f$ 是单同态.

(2) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} Z$ 是关系正合序列 $\Leftrightarrow f$ 是满同态.

证明 机械的验证. //

引理 6.7 设 $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow Z$ 是关系正合序列，M 是不可分右 S- 系，则 $M \otimes A \to M \otimes B \to M \otimes C \to M \otimes Z$ 也是关系正合序列.

证明 因为 M 是不可分的，所以对任意 $m, m' \in M$，若 $m \neq m'$，则存在 $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S, m_1, \cdots, m_n \in M$，使得

$$m = m_1 s_1, m_1 t_1 = m_2 s_2, \cdots, m_n t_n = m'. \qquad (**)$$

先证 $M \otimes Z$ 是单元集合. 设 $Z = \{z\}, m \otimes z, m' \otimes z \in M \otimes Z$. 由 $(**)$ 式可知在 $M \otimes Z$ 中有

$$\begin{aligned} m \otimes z &= m_1 s_1 \otimes z = m_1 \otimes s_1 z = m_1 \otimes z \\ &= m_1 \otimes t_1 z = m_1 t_1 \otimes z = m_2 s_2 \otimes z \\ &= \cdots = m_n s_n \otimes z = m_n \otimes s_n z \\ &= m_n \otimes z = m_n \otimes t_n z = m_n t_n \otimes z \\ &= m' \otimes z. \end{aligned}$$

现在即可证明 $M \otimes B \xrightarrow{1 \otimes \psi} M \otimes C \longrightarrow M \otimes Z$ 是关系正合列. 事实上，因为 ψ 是满同态，所以对任意 $m \otimes c \in M \otimes C$，存在 $b \in B$，使得 $\psi(b) = c$. 所以 $m \otimes c = m \otimes \psi(b) = (1 \otimes \psi)(m \otimes b)$. 即 $1 \otimes \psi$ 是满的. 由引理 6.6 即知结论成立.

下证 $M \otimes A \xrightarrow{1 \otimes \varphi} M \otimes B \xrightarrow{1 \otimes \psi} M \otimes C$ 是关系正合列. 设 $b, b' \in B, m, m' \in M$，使得在 $M \otimes C$ 中有 $m \otimes \psi(b) = m' \otimes \psi(b')$，则存在 $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S, c_2, \cdots, c_n \in C, m_1, \cdots, m_n \in M$，使得

$$m = m_1 s_1,$$

$$m_1t_1 = m_2s_2, \qquad s_1\psi(b) = t_1c_2,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$m_nt_n = m', \qquad s_nc_n = t_n\psi(b').$$

因为 ψ 是满同态，所以存在 $b_2,\cdots b_n \in B$，使得

$$\psi(b_i) = c_i, \quad i = 2,\cdots,n.$$

因此有

$$(s_1b, t_1b_2), (s_2b_2, t_2b_3), \cdots, (s_nb_n, t_nb') \in \mathrm{Ker}\psi.$$

而 $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow Z$ 是关系正合序列，所以 $\mathrm{Ker}\psi = \rho_\varphi = (\mathrm{Im}\varphi \times \mathrm{Im}\varphi) \cup 1_B$，所以有下述三种情形：

(i) $s_1b \neq t_1b_2$. 此时必有 $a \in A$，使得 $\varphi(a) = s_1b$. 所以 $m \otimes b = m_1s_1 \otimes b = m_1 \otimes s_1b = m_1 \otimes \varphi(a) = (1 \otimes \varphi)(m_1 \otimes a)$. 因此有 $m \otimes b \in \mathrm{Im}(1 \otimes \varphi)$.

(ii) 存在 $k \in \{1,\cdots,n-1\}$，使得 $s_1b = t_1b_2, \cdots, s_kb_k = t_kb_{k+1}$，但 $s_{k+1}b_{k+1} \neq t_{k+1}b_{k+2}$. 此时存在 $a \in A$，使得 $\varphi(a) = s_{k+1}b_{k+1}$. 所以在 $M \otimes B$ 中有

$$\begin{aligned}
m \otimes b &= m_1s_1 \otimes b = m_1 \otimes s_1b = m_1 \otimes t_1b_2 \\
&= m_1t_1 \otimes b_2 = m_2s_2 \otimes b_2 = \cdots \\
&= m_ks_k \otimes b_k = m_k \otimes s_kb_k = m_k \otimes t_kb_{k+1} \\
&= m_kt_k \otimes b_{k+1} = m_{k+1}s_{k+1} \otimes b_{k+1} \\
&= m_{k+1} \otimes s_{k+1}b_{k+1} = m_{k+1} \otimes \varphi(a) \\
&= (1 \otimes \varphi)(m_{k+1} \otimes a).
\end{aligned}$$

所以 $m \otimes b \in \mathrm{Im}(1 \otimes \varphi)$.

(iii) $s_1b = t_1b_2, s_2b_2 = t_2b_3, \cdots, s_nb_n = t_nb'$. 此时在 $M \otimes B$ 中有

$$\begin{aligned}
m \otimes b &= m_1s_1 \otimes b = m_1 \otimes s_1b = m_1 \otimes t_1b_2 = \cdots \\
&= m_n \otimes t_nb' = m_nt_n \otimes b' = m' \otimes b'.
\end{aligned}$$

同理可以证明 $m' \otimes b' \in \mathrm{Im}(1 \otimes \varphi)$ 或者 $m' \otimes b' = m \otimes b$.

所以 $(m \otimes b, m' \otimes b') \in (\mathrm{Im}(1 \otimes \varphi) \times \mathrm{Im}(1 \otimes \varphi)) \cup 1_{M \otimes B}$. 这就证明了 $\mathrm{Ker}(1 \otimes \psi) \subseteq \rho_{1 \otimes \varphi}$. 下证相反的包含关系.

设 $m, m' \in M, a, a' \in A$. 要证明在 $M \otimes C$ 中有 $m \otimes \psi\varphi(a) = m' \otimes \psi\varphi(a')$. 因为 M 是连通的，故由（* *）式可知在 $M \otimes C$ 中有

$$\begin{aligned}
m \otimes \psi\varphi(a) &= m_1 s_1 \otimes \psi\varphi(a) = m_1 \otimes s_1\psi\varphi(a) \\
&= m_1 \otimes \psi\varphi(s_1 a) = m_1 \otimes \psi\varphi(t_1 a) \\
&= m_1 \otimes t_1\psi\varphi(a) = m_1 t_1 \otimes \psi\varphi(a) \\
&= m_2 s_2 \otimes \psi\varphi(a) = \cdots \\
&= m_n t_n \otimes \psi\varphi(a) = m' \otimes \psi\varphi(a) \\
&= m' \otimes \psi\varphi(a').
\end{aligned}$$

此即完成了证明. //

引理 6.8 设下图中上、下两行都是关系正合序列，且每个方块都可交换，

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \xrightarrow{\varphi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \longrightarrow & Z \\
\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\
A' & \xrightarrow{\varphi'} & B' & \xrightarrow{\psi'} & C' & \longrightarrow & Z
\end{array}$$

并设 β 是单同态，则 γ 是单同态当且仅当 $\rho_\beta \cap \rho_{\psi'} = \rho_{\beta\varphi}$. 这里 $\rho_\beta = (\mathrm{Im}\beta \times \mathrm{Im}\beta) \cup 1_{B'}$，其他同理.

证明 机械的图追踪. //

命题 6.9 设 A 是循环右 S-系 B 的循环子系，且包含同态 $A \to B$ 是 R-纯的，则 A 上的如下形式的方程组

$$\sum = \{xs_j = a_j \mid a_j \in A, j = 1, \cdots, n\}$$

若在 B 中有解，则在 A 中一定有解.

证明 设 $\sum$ 在 B 中有解 b. 作 S-同态 $\alpha: S \to S^n$ 为 $\alpha(s) = (ss_1, ss_2, \cdots, ss_n)$，则有关系正合序列

$$S \xrightarrow{\alpha} S^n \longrightarrow S^n/\rho_\alpha \longrightarrow Z.$$

因为 A, B 都是连通的右 S-系，所以由引理 6.7 知有如下的关系正合交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
A \otimes S & \longrightarrow & A \otimes S^n & \longrightarrow & A \otimes S^n/\rho_a & \longrightarrow & A \otimes Z \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
B \otimes S & \longrightarrow & B \otimes S^n & \longrightarrow & B \otimes S^n/\rho_a & \longrightarrow & B \otimes Z
\end{array}$$

利用同构 $A \otimes S \simeq A$ 可知有 $A \otimes S^n \simeq A^n, B \otimes S^n \simeq B^n$. 故有如下的关系正合交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \xrightarrow{\varphi} & A^n & \longrightarrow & A \otimes S^n/\rho_a & \longrightarrow & A \otimes Z \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \alpha'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \beta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\
B & \xrightarrow{\phi} & B^n & \longrightarrow & B \otimes S^n/\rho_a & \longrightarrow & B \otimes Z
\end{array}$$

因为包含同态 $A \rightarrow B$ 是 R-纯的，所以 β, γ 均为单同态，所以由引理 6.8 知有 $\rho_\beta \cap \rho_\phi = \rho_{\beta\varphi}$.

因为 $\phi(b) = (bs_1, \cdots, bs_n) = (a_1, \cdots, a_n) = \beta(a_1, \cdots, a_n)$，所以存在 $a \in A$，使得 $\beta\varphi(a) = (a_1, \cdots, a_n)$. 而 $\beta\varphi(a) = \phi\alpha'(a) = \phi(a) = (as_1, \cdots, as_n)$，所以 $as_j = a_j, j = 1, \cdots, n$. 这说明 $\sum$ 在 A 中有解. //

第五章　平坦性对幺半群的刻画

§1　条件(P)和强平坦性一致的幺半群

由上一章的讨论可知，强平坦性 ⇒ 条件(P)⇒ 平坦性，且每个递推关系都是不可逆的. 然而这并不排除在某些特殊的幺半群上，某两个概念是一致的. 如何刻画这些幺半群(在其上两个不同的概念是一致的)，便是半群同调分类理论的主要内容. 本章考虑的问题主要是这类问题. 本节和下节分别讨论条件(P)和强平坦性一致的幺半群，以及平坦性和条件(P)一致的幺半群.

命题 1.1　设 λ 是 S 上的左同余，则 S/λ 满足条件(P)当且仅当：对任意 $s,t \in S$，如果 $s\lambda t$，那么存在 $u,v \in S$，使得 $su = tv$，且 $u\lambda 1\lambda v$.

证明　⇐)　设 $s,s' \in S$，$a,a' \in S/\lambda$，满足 $sa = s'a'$. 可设 $a = x\lambda$，$a' = x'\lambda$，则 $sx\lambda = s'x'\lambda$. 所以由条件知存在 $u,v \in S$，使得 $sxu = s'x'v$. 且 $u\lambda 1\lambda v$. 因此，$a = x\lambda = xu\lambda = xu(1\lambda)$，$a' = x'\lambda = x'v\lambda = x'v(1\lambda)$，即 S/λ 满足条件(P).

⇒)　设 $s\lambda t$，则 $s\lambda = t\lambda$，因此存在 $u,v \in S$，$a'' = x\lambda \in S/\lambda$，使得 $su = tv$，$1\lambda = ua'' = ux\lambda = va'' = vx\lambda$. 所以有 $sux = tvx$，且 $ux\lambda 1\lambda vx$.　//

命题 1.2　设 λ 是 S 上的左同余，则 S/λ 是强平坦系当且仅当：对任意 $s,t \in S$，如果 $s\lambda t$，那么存在 $u \in S$，使得 $su = tu$，且 $u\lambda 1$.

证明　由命题 4.3.15 和定理 4.4.7 即得.　//

命题 1.3　记 $\lambda(1,x)$ 为 S 的由 $(1,x)$ 生成的最小左同余，则 $S/\lambda(1,x)$ 满足条件(P).

证明　设 $s,t \in S$，$s\lambda(1,x)t$，则由命题 1.1.3 知 $s = t$，或者存

在 $t_1,\cdots,t_n \in S$，使得

$$s = t_1c_1, t_1d_1 = t_2c_2, \cdots, t_nd_n = t,$$

其中 (c_i,d_i) 或 $(d_i,c_i) \in \{(1,x)\}, i = 1,2,\cdots,n$. 容易证明(例如用数学归纳法)此时存在自然数 m,k，使得 $sx^m = tx^k$. 又显然有 $x^m = x^{m-1}x\lambda x^{m-1} = \cdots\lambda 1\lambda x\lambda\cdots\lambda x^k$，所以 $S/\lambda(1,x)$ 满足条件(P). //

命题 1.4 $S/\lambda(1,x)$ 是强平坦的当且仅当存在自然数 n，使得 $x^{n+1} = x^n$.

证明 因为 $x\lambda(1,x)1$，所以由命题 1.2 知存在 $u \in S$，使得 $xu = u$，且 $u\lambda(1,x)1$. 由命题 1.3 的证明即知存在自然数 m,n，使得 $ux^m = x^n$. 所以

$$x^{n+1} = xx^n = xux^m = ux^m = x^n.$$

反之，设 $x^{n+1} = x^n$. 对于任意 $s,t \in S$，若 $s\lambda(1,x)t$，则和命题 1.3 的证明类似地可知存在自然数 m,k，使得 $sx^m = tx^k$. 取自然数 r 使之大于 n,m,k，则有 $sx^r = tx^r$，且 $x^r\lambda(1,x)1$. 由命题 1.2 即知 $S/\lambda(1,x)$ 是强平坦. //

下面是本节的主要定理.

定理 1.5 如下几条是等价的：

(1) 每个满足条件(P) 的有限生成 S- 系是强平坦的；

(2) 每个满足条件(P) 的循环 S- 系是强平坦的；

(3) 任意 $x \in S$，$S/\lambda(1,x)$ 是强平坦的；

(4) 任意 $x \in S$，存在自然数 n，使得 $x^{n+1} = x^n$.

证明 (1)⇒(2)⇒(3) 是显然的. 由命题 1.4 可得(3)⇒(4).

(4)⇒(2) 设 S/λ 满足条件(P)，$s,t \in S$ 满足 $s\lambda t$. 由命题 1.1 知存在 $u,v \in S$，使得 $su = tv$，且 $u\lambda 1\lambda v$. 由 $u\lambda v$ 可知存在 $p,q \in S$，使得 $up = vq$ 且 $p\lambda 1\lambda q$. 由(4) 知存在 m,n，使得 $u^{m+1} = u^m, v^{n+1} = v^n$. 记 $e = u^m, f = v^n$，则 $e,f \in E(S)$，且 $ue = e, vf = f, e\lambda 1\lambda f$. 再由命题 1.1 知存在 $w,z \in S$，使得 $ew = fz$，且 $w\lambda 1\lambda z$. 记 $h = ew$，则 $h = ew\lambda e\lambda 1$，且 $sh = sew = suew = tvew = tvfz = tfz = th$. 所以 S/λ 是强平坦的.

(2)⇒(1) 设 A 是有限生成 S- 系且满足条件(P)，则 A 是循

环子系的不交并. 由此即知这些循环子系都满足条件(P),从而由条件知都是强平坦的. 因此 A 是强平坦的. //

定理 1.5 中的条件(4) 能否保证所有满足条件(P) 的 S- 系都是强平坦的,或者如何刻画所有满足条件(P) 的 S- 系都是强平坦系的幺半群,这些至今仍是未解决的问题.

下面考虑几类特殊幺半群,在其上所有满足条件(P) 的 S- 系都是强平坦的.

命题 1.6 设 S 是幂等元幺半群,则任意满足条件(P) 的 S- 系都是强平坦的.

证明 设 S- 系 A 满足条件(P),$a \in A, s, t \in S$,满足 $sa = ta$. 由条件(P) 可知存在 $u, v \in S, a' \in A$,使得 $su = tv, a = ua' = va'$. 因为 u, v 都是幂等元,所以 $a = ua = va$. 再由条件(P) 知存在 $a'' \in A, r, p \in S$,使得 $ur = vp, a = ra'' = pa''$. 令 $h = ur$,则 $ha = ura = urra'' = ura'' = ua = a, sh = sur = suur = suh = tvh = tvvp = tvp = th$. 所以 A 满足条件(E). 因此 A 是强平坦的. //

称半群 T 为 null 半群,如果对任意 $t, t' \in T, tt' = 0$.

命题 1.7 设 T 是 null 半群,$S = T^1$,则任意满足条件(P) 的 S- 系都是强平坦的.

证明 设 S- 系 A 满足条件(P),$a \in A, s, t \in S$,满足 $sa = ta$. 由条件(P) 可知存在 $u, v \in S, a' \in A$,使得 $su = tv, a = ua' = va'$. 如果 $u = 1, v \neq 1$,则 $a = a'$,所以 $a = va' = va = v^2a = 0a$,且 $s0 = t0$. 所以满足条件(E). 如果 $u \neq 1, v = 1$,则采用和上面类似的证明. 下面设 $u, v \neq 1$. 如果 $s, t \neq 1$,那么 $a = ua', su = 0 = tu$. 如果 $s = 1, t \neq 1$,那么 $a = 1 \cdot a = sa = ta = t^2a = 0a$,且 $s0 = t0$. 如果 $s \neq 1, t = 1$,那么证明同上. 最后,如果 $s = t = 1$,则 $u = v$. 总之 A 满足条件(E),从而 A 是强平坦系. //

§2 平坦性和条件(P)一致的幺半群

命题 2.1 设 J 是 S 的真左理想，则 S-系 $A(J)$ 满足条件(E)但不满足条件(P).

证明 由 $A(J)$ 的构造容易验证. //

命题 2.2 设 J 是 S 的真左理想，则如下两条是等价的：

(1) $A(J)$ 是平坦的；

(2) 对任意 $j \in J, j \in jJ$.

证明 (1)⇒(2) 设 $A(J)$ 是平坦的. 因为对于 $j \in J$，有 $j(1,x) = (j,z) = j(1,y)$，所以在 $S \otimes A(J)$ 中有 $j \otimes (1,x) = j \otimes (1,y)$，则由 $A(J)$ 的平坦性可知在 $jS \otimes A(J)$ 中有 $j \otimes (1,x) = j \otimes (1,y)$. 所以存在 $j_2, \cdots, j_n \in jS, a1, \cdots, an \in A(J), s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$，使得

$$\begin{aligned} & && (1,x) = s_1 a_1, \\ js_1 &= j_2 t_1, && t_1 a_1 = s_2 a_2, \\ j_2 s_2 &= j_3 t_2, && t_2 a_2 = s_3 a_3, \\ &\cdots\cdots && \cdots\cdots \\ j_n s_n &= j t_n, && t_n a_n = (1,y). \end{aligned}$$

设 $a_i = (p_i, w_i)$，其中 $p_i \in S, w_i \in \{x,y,z\}$. 由上述等式组知肯定存在某个 i，使得 $w_i = z$，因此 $t_i p_i \in J$. 所以，$j = js_1 p_1 = j_2 t_1 p_1 = j_2 s_2 p_2 = \cdots = j_i s_i p_i = j_{i+1} t_i p_i \in j_{i+1} J$. 又 $j_{i+1} \in jS$，所以 $j \in jJ$.

(2)⇒(1) 设 A 是任意右 S-系，$a, a' \in A, m, m' \in A(J)$，在 $A \otimes A(J)$ 中有 $a \otimes m = a' \otimes m'$. 要证明在 $(aS \cup a'S) \otimes A(J)$ 中有 $a \otimes m = a' \otimes m'$.

设 $m, m' \in S(1,x)$，则在 $A \otimes S(1,x)$ 中有 $a \otimes m = a' \otimes$

m'(利用命题4.2.12容易证明). 而$S(1,x)\simeq S$是自由S-系,从而是平坦的,所以在$(aS\cup a'S)\otimes S(1,x)$中,因此在$(aS\cup a'S)\otimes A(J)$中,有$a\otimes m=a'\otimes m'$. 若$m,m'\in S(1,y)$,则可采用类似的证明.

因此可设$m=(s,x),m'=(t,y)$,其中$s,t\in S-J$. 由命题4.2.12知存在$u_1,v_1,\cdots,u_n,v_n\in S,a_2,\cdots,a_n\in A,m_i=(p_i,w_i)\in A(J)$,其中$p_i\in S,w_i\in\{x,y,z\}$,使得

$$\begin{aligned}
& & (s,x)&=u_1(p_1,w_1),\\
au_1&=a_2v_1, & v_1(p_1,w_1)&=u_2(p_2,w_2),\\
a_2u_2&=a_3v_2, & v_2(p_2,w_2)&=u_3(p_3,w_3),\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\\
a_nu_n&=a'v_n, & v_n(p_n,w_n)&=(t,y).
\end{aligned}$$

显然存在i,使得$v_ip_i=u_{i+1}P_{i+1}\in J$,所以存在$r\in J$,使得$v_ip_i=u_{i+1}p_{i+1}=v_ip_ir$. 因此,$as=au_1p_1=a_2v_1p_1=\cdots=a_{i+1}v_ip_i=a_{i+1}u_{i+1}p_{i+1}=\cdots=a'v_np_n=a't$,所以$asr=as=a't=a'tr$. 在$aS\otimes A(J)$中计算:

$$\begin{aligned}
a\otimes(s,x)&=a\otimes s(1,x)=as\otimes(1,x)\\
&=asr\otimes(1,x)=as\otimes r(1,x)\\
&=as\otimes(r,z).
\end{aligned}$$

同理在$a'S\otimes A(J)$中有$a'\otimes(t,y)=a't\otimes(r,z)$. 所以在$(aS\cup a'S)\otimes A(J)$中有$a\otimes(s,x)=as\otimes(r,z)=a't\otimes(r,z)=a'\otimes(t,y)$. //

定理 2.3 设所有平坦S-系满足条件(P),则$|E(S)|=1$.

证明 设$e\in E(S),e\neq 1$,则$Se\neq S$. 显然对于任意$j=se\in Se,j=see\in jSe$,所以由命题2.2知$A(Se)$是平坦的,从而满足条件(P). 和命题2.1矛盾. //

定理 2.4 如下两条是等价的:

(1) $|E(S)| = 1$;

(2) 对于 S 的任意有限生成真左理想 J,存在 $j \in J - jJ$.

证明 (1)⇒(2) 设 $|E(S)| = 1$,则 S 中的任意正则元是可逆元. 设 $J = Sx_1 \cup \cdots \cup Sx_n$ 是 S 的有限生成左理想,且 $J \neq S$. 如果 $x_1 \notin x_1J$,则证明完成. 下设 $x_1 \in x_1J$. 不妨假定 $x_1 = x_1ux_2$,其中 $u \in S$. 如果 $x_2 \notin x_2J$,则证明完成. 下设 $x_2 \in x_2J$. 因为 $x_2 \notin x_2Sx_1 \cup x_2Sx_2$,所以可设 $x_2 = x_2vx_3$,其中 $v \in S$. 继续上述讨论,可知存在 x_i 满足 $x_i \notin x_iJ$.

(2)⇒(1) 由定理 2.3 的证明即得结论. //

定理 2.3 和定理 2.4 给出了所有平坦 S- 系满足条件(P)的两个必要条件. 下面例子说明存在满足 $|E(S)| = 1$ 的幺半群 S,其上的平坦 S- 系可以不满足条件(P).

例 2.5[109] 设 G 是群,T 是没有幂等元的右单半群(例如 T 是 Bear-Levi 半群). 令 $S = G \dot{\cup} T$,规定 S 中的乘法为

$$g_1g_2 \in G, t_1t_2 \in T, tg = gt = t,$$
$$\forall g_1, g_2, g \in G, \forall t_1, t_2, t \in T.$$

容易验证 S 是幺半群且只有一个幂等元. 显然 T 是 S 的真左理想,对任意 $t \in T$,$tT = T$,所以 $t \in tT$. 所以由命题 2.2 知 $A(T)$ 是平坦 S- 系. 但由命题 2.1 知 $A(T)$ 不满足条件(P).

例 2.5 中的 S 是不交换的. 下面给出一个满足要求的交换幺半群的例子. 为此先证明

命题 2.6 对于幺半群 S,以下两条等价:

(1) 对于每个真左理想 J,存在 $j \in J - jJ$;

(2) S 中的任意无穷元素链 $x_0, x_1, \cdots$,若 $x_i = x_ix_{i+1}, i = 0, 1, \cdots$,则存在自然数 n,使得 $x_n = x_{n+1} = \cdots = 1$.

证明 (1)⇒(2) 考虑 S 的左理想 $J = \bigcup_{i=0}^{\infty} Sx_i$. 对于任意 $j \in$

J,存在 x_i 和 $s \in S$,使得

$$j = sx_i = sx_ix_{i+1} = jx_{i+1} \in jJ,$$

所以由(1)即知 $J = S$. 因此存在 x_n 和 $t \in S$,使得 $1 = tx_n$. 所以 $x_{n+1} = 1 \cdot x_{n+1} = tx_nx_{n+1} = tx_n = 1$,因此 $x_{n+2} = \cdots = 1$.

(2)⇒(1) 设 J 是 S 的真左理想. 取 $x_0 \in J$. 若 $x_0 \notin x_0J$,则证明完成. 设 $x_0 \in x_0J$,则存在 $x_1 \in J$,使得 $x_0 = x_0x_1$. 若 $x_1 \notin x_1J$,则证明完成. 设 $x_1 \in x_1J$,则存在 $x_2 \in J$,使得 $x_1 = x_1x_2$. 继续上述过程,可得到两种情形:

(i) 存在某个 i,使得 $x_i \notin x_iJ$.

(ii) 存在无穷元素链 $x_0, x_1, \cdots$,使得 $x_i = x_ix_{i+1}, i = 0,1,\cdots$.

若(ii)成立,则由条件知存在 n,使得 $x_n = x_{n+1} = \cdots = 1$,所以 $J = S$. 矛盾. 因此(i)成立. //

例 2.7[120] 定义 $(-\infty,\infty)$ 上的部分映射

$$f_i(x) = \begin{cases} i - 1 + \dfrac{1}{2}(x - i + 1), & i - 1 \leqslant x \leqslant i, \\ x, & x < i - 1, \end{cases}$$

$i = 1,2,\cdots$. 容易证明 $f_if_{i+1} = f_{i+1}f_i = f_i$. 因此对任意 $i > j$,有 $f_if_j = f_jf_i = f_j$. 令

$$S = \{f_i^n \mid i = 1,2,\cdots, n = 1,2,\cdots\} \cup \{1\},$$

其中 $1:(-\infty,\infty) \to (-\infty,\infty)$ 是单位映射. 显然 S 是交换幺半群. 容易证明当 $x \in (i-1,i)$ 时,

$$f_i^n(x) = i - 1 + \frac{1}{2^n}(x - i + 1),$$

所以 f_i^n 不是幂等元,故 $|E(S)| = 1$.

显然 S 中有无穷元素链 $f_1, f_2, \cdots$,满足 $f_i = f_if_{i+1}, i = 1,2,\cdots$. 所以由命题 2.6 知存在 S 的真左理想 J,使得对任意 $j \in J$, $j \in jJ$.

这个例子说明定理 2.4(2) 中的"有限生成"不能去掉,即使 S 是交换幺半群.

对于上述 J,由命题 2.2 知 $A(J)$ 是平坦的. 但由命题 2.1 知 $A(J)$ 不满足条件(P). 所以平坦 S- 系可以不满足条件(P),即使 S 是交换幺半群且 $|E(S)| = 1$.

定理 2.8 所有平坦系是强平坦的 $\Leftrightarrow S = \{1\}$.

证明 若 $S = \{1\}$,则所有 S- 系是自由的,所以任意平坦 S- 系是强平坦的.

设所有平坦 S- 系是强平坦的,则由定理 2.3 和定理 1.5 知 $|E(S)| = 1$,且对任意 $x \in S$,存在自然数 n,使得 $x^{n+1} = x^n$. 所以 $x^n \in E(S)$,从而 $x^n = 1$. 因此 x 是可逆元. 再由 $x^{n+1} = x^n$ 即得 $x = 1$. 所以 $S = \{1\}$. //

如何刻画所有平坦 S- 系满足条件(P)的幺半群至今仍是一个未解决的问题. 下面是一些部分的解答.

定理 2.9 对于幺半群 S,以下三条等价:

(1) S 是左可消幺半群;

(2) S 是右 PP 的,且任意平坦 S- 系满足条件(P);

(3) S 是右 PP 的,且任意弱平坦 S- 系满足条件(P).

证明 (1)$\Rightarrow$(3) 当 S 是左可消幺半群时,S 显然是右 PP 的. 设 A 是弱平坦 S- 系,$a, a' \in A$,$x, y \in S$ 满足 $xa = ya'$. 由定理 4.5.5 知存在 $a'' \in A$,$u, v, x_1, y_1 \in S$,使得 $xu = x$,$yv = y$,$xx_1 = yy_1$,$ua = x_1a''$,$va' = y_1a''$. 由 S 的左可消性知 $u = 1 = v$,所以 $a = x_1a''$,$a' = y_1a''$. 因此 A 满足条件(P).

(3)$\Rightarrow$(2) 显然.

(2)$\Rightarrow$(1) 由定理 2.3 知 $|E(S)| = 1$. 设 $r, x, y \in S$ 满足 $rx = ry$. 因为 S 是右 PP 的,所以由命题 2.5.1 知存在 $e \in E(S)$,使得 $r = re$,且 $rs = rt \Rightarrow es = et$. 特别地 $ex = ey$. 但 $e = 1$,所以 $x =$

y. 这说明 S 是左可消的. //

定理 2.10 设 S 是右 PSF 幺半群,则以下三条是等价的:

(1) 所有平坦 S- 系满足条件(P);

(2) 所有弱平坦 S- 系满足条件(P);

(3) 对于 S 的任意真左理想 J,存在 $j \in J - jJ$.

证明 (2)⇒(1) 显然.

(1)⇒(3) 由命题 2.1 和命题 2.2 即得结论.

(3)⇒(2) 设 A 是弱平坦 S- 系,$a,a' \in A$,$x,y \in S$,满足 $xa = ya'$. 由定理 4.5.5 知存在 $a'' \in A$,$x_1,y_1,u,v \in S$,满足

$$xu = x, yv = y, xx_1 = yy_1,$$
$$ua = x_1a'', va' = y_1a''.$$

因为 S 是右 PSF 幺半群,所以由定理 4.4.13 知 x 是 S 的左半可消元. 因此由 $xu = x$ 可知存在 $x_1 \in S$,使得 $x = xx_1$,$x_1u = x_1$. 同样由定理 4.4.13 知 x_1 也是左半可消元,所以存在 $x_2 \in S$,使得 $x_1 = x_1x_2$,$x_2u = x_2$. 继续上述过程,可以得到无限元素链 $x,x_1,\cdots$,满足

$$x_i = x_ix_{i+1}, x_iu = x_i, \quad i = 1,2,\cdots.$$

由命题 2.6 知存在自然数 n,使得 $x_n = x_{n+1} = \cdots = 1$. 所以 $u = 1$. 同理可以证明 $v = 1$. 所以 $a = x_1a''$,$a' = y_1a''$,$xx_1 = yy_1$. 即 A 满足条件(P). //

由命题 2.1 和 2.2 知若所有平坦 S- 系满足条件(P),则对于 S 的任意真左理想 J,存在 $j \in J - jJ$. 下面给出例子说明反过来的结论是不成立的,即定理 2.10 中的条件"S 是右 PSF 幺半群"不能去掉. 为此先证明一个命题,该命题以后要多次使用.

命题 2.11 设 S 是幺半群,λ 是 S 上的左同余,则 S- 系 S/λ 是弱平坦的当且仅当对任意 $u,v \in S$,若 $u\lambda v$,则存在 $s,t \in S$,使得 $us = vt$,且 $s(\lambda \vee \Delta u)1$,$t(\lambda \vee \Delta v)1$. 这里 Δu 是如下定义的 S 上的右

同余：

$$x\Delta uy \Leftrightarrow ux = uy.$$

证明 设 S/λ 是弱平坦的，$u,v \in S$ 满足 $u\lambda v$，则 $u\bar{1} = v\bar{1}$. 由定理 4.5.2 知存在 $a \in S/\lambda, z \in uS \cap vS$，使得 $u\bar{1} = v\bar{1} = za$. 设 $a = w\bar{1}, w \in S, z = us = vt, s, t \in S$，则有

$$u \cdot \bar{1} = zw\bar{1} = usw \cdot \bar{1},$$

$$v \cdot \bar{1} = zw\bar{1} = vtw\bar{1}.$$

因此在 $S \otimes S/\lambda$ 中有 $u \otimes \bar{1} = 1 \otimes \bar{u} = 1 \otimes \overline{usw} = 1 \otimes u \cdot \overline{sw} = u \otimes \overline{sw}$. 由于 S/λ 是弱平坦的，所以在 $uS \otimes S/\lambda$ 中有 $u \otimes \bar{1} = u \otimes \overline{sw}$. 因此存在 $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$，使得

$$
\begin{aligned}
& & \bar{1} &= s_1\bar{1}, \\
us_1 &= ut_1, & t_1\bar{1} &= s_2\bar{1}, \\
us_2 &= ut_2, & t_2\bar{1} &= s_3\bar{1}, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
us_n &= ut_n, & t_n\bar{1} &= \overline{sw}.
\end{aligned}
$$

所以有

$$sw\lambda t_n(\Delta u)s_n\lambda t_{n-1}(\Delta u)s_{n-1}\cdots(\Delta u)s_1\lambda 1,$$

即 $sw(\lambda \vee \Delta u)1$. 同理可以证明 $tw(\lambda \vee \Delta v)1$. 显然还有

$$usw = vtw,$$

所以结论成立.

反过来，在题设条件下，要证明 S/λ 是弱平坦的. 设 $u,v \in S$，且在 $S \otimes S/\lambda$ 中有 $u \otimes \bar{1} = v \otimes \bar{1}$. 要证明在 $(uS \cup vS) \otimes S/\lambda$ 中也有 $u \otimes \bar{1} = v \otimes \bar{1}$，易知有 $u \cdot \bar{1} = v \cdot \bar{1}$，即 $u\lambda v$. 由条件知存在 $s, t \in S$，使得 $us = vt, s(\lambda \vee \Delta u)1, t(\lambda \vee \Delta v)1$. 设 $x_0, y_1, x_1, \cdots, x_n, y_{n+1}, z_0, w_1, z_1, \cdots, z_m, w_{m+1} \in S$，使得

$$1 = x_0\lambda y_1(\Delta u)x_1\lambda y_2(\Delta u)x_2\cdots(\Delta u)x_n\lambda y_{n+1} = s,$$

$$t = z_0\lambda w_1(\Delta v)z_1\lambda w_2(\Delta v)z_2\cdots(\Delta v)z_m\lambda w_{m+1} = 1.$$

在$(uS \cup vS) \otimes S/\lambda$中进行计算：

$$
\begin{aligned}
u \otimes \bar{1} &= u \otimes \overline{x_0} = u \otimes \overline{y_1} = uy_1 \otimes \bar{1} = ux_1 \otimes \bar{1} \\
&= u \otimes \overline{x_1} = u \otimes \overline{y_2} = uy_2 \otimes \bar{1} = ux_2 \otimes \bar{1} \\
&= u \otimes \overline{x_2} = \cdots = u \otimes \overline{x_n} = u \otimes \overline{y_{n+1}} \\
&= u \otimes \bar{s} = us \otimes \bar{1} = vt \otimes \bar{1} = v \otimes \bar{t} = v \otimes \overline{z_0} \\
&= v \otimes \overline{w_1} = \cdots = v \otimes \overline{w_m} = vw_m \otimes \bar{1} \\
&= vz_m \otimes \bar{1} = v \otimes \overline{z_m} = v \otimes \overline{w_{m+1}} = v \otimes \bar{1}.
\end{aligned}
$$

所以S/λ是弱平坦S-系. //

例2.12 设$S = \langle x,y \mid xy = x^2 = yx \rangle \cup \{1\}$. 令$\lambda = \lambda(x,x^2) \vee \lambda(1,y^2)$,则有

(i) S是交换幺半群;

(ii) 对S的任意真理想J,存在元素$j \in J - jJ$;

(iii) S/λ是平坦S-系,但不满足条件(P).

证明 首先,$S = \{x^n \mid n$是自然数$\} \cup \{y^n \mid n$是自然数$\} \cup \{1\}$,其运算为$x^n y^m = y^m x^n = x^{m+n}$. 显然$S$是交换幺半群,且对任意$n$,$y^n$是$S$的可消元. 若$j = jj'$,则容易知道$j' = 1$. 所以(ii)成立.

对于S作如下的分类:

$$[x] = \{x^n \mid n = 1,2,\cdots\};$$
$$[1] = \{y^{2n} \mid n = 1,2,\cdots\} \cup \{1\};$$
$$[y] = \{y^1, y^3, y^5, \cdots\}.$$

容易证明该分类决定的等价关系σ是S上的同余,且$\sigma = \lambda$. 即λ决定的λ-类只有上述三类.

设$u,v \in S$满足$u\lambda v$,则有下述三种情形:

(a) $x^m \lambda x^n$. 不妨设$1 \leqslant m \leqslant n$. 若$m = n$,则令$s = t = 1$,显然有$us = vt$,$s(\lambda \vee \Delta u)1(\lambda \vee \Delta v)t$. 设$m < n$. 此时有$x^m x^{n-m} = x^n$

$\cdot 1$. 令 $s = x^{n-m}$, $t = 1$, 则 $us = vt$, $t(\lambda \vee \Delta v)1$, 而 $x^{n-m}\lambda x^{2(n-m)}(\Delta x^m)$ $y^{2(n-m)}\lambda 1$, 即 $s(\lambda \vee \Delta u)1$.

(b) $y^{2m}\lambda y^{2n}$. 不妨设 $0 \leqslant m \leqslant n$(约定 $y^0 = 1$). 此时有 $y^{2m} \cdot y^{2n-2m} = y^{2n} \cdot 1$. 令 $s = y^{2n-2m}$, $t = 1$, 则 $s\lambda 1$, 从而 $s(\lambda \vee \Delta u)1$.

(c) $y^{2m-1}\lambda y^{2n-1}$. 不妨设 $1 \leqslant m \leqslant n$. 同样有 $y^{2m-1} \cdot y^{2n-2m} = y^{2n-1} \cdot 1$, $y^{2n-2m}\lambda 1$.

所以由命题 2.11 知 S/λ 是弱平坦左 S- 系. 又 S 是交换幺半群,所以由下一节的定理 3.10 即知 S/λ 是平坦的.

设 S/λ 满足条件(P). 因为 $x\lambda x^2$,所以由命题 1.1 知存在 $s,t \in S$,使得 $xs = x^2t$,且 $s\lambda 1\lambda t$. 显然 $s,t \in [1]$. 因此 xs 是 x 的奇数次幂,而 x^2t 是 x 的偶数次幂. 这说明 $xs \neq x^2t$. 矛盾. 因此 S/λ 不满足条件(P). //

这个例子也说明条件"对 S 的任意真左理想 J,存在 $j \in J - jJ$"不能保证所有循环平坦 S- 系满足条件(P).

§3 弱平坦性和平坦性一致的幺半群

平坦系一定是弱平坦系,但弱平坦系不一定是平坦系. 本节讨论几类使得所有弱平坦系是平坦系的特殊幺半群,其主要内容取自于 Bulman-Fleming 和 McDowell 的论文[23].

引理 3.1 设 A 是右 S- 系, B 是左 S- 系,且 B 是主弱平坦的. 若 $a, a_1 \in A$, $b, b_1 \in B$, $s_1 \in S$ 满足 $a = a_1s_1$, $s_1b = s_1b_1$,则在 $aS \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a \otimes b_1$.

证明 因为 $s_1b = s_1b_1$,所以在 $S \otimes B$ 中有 $s_1 \otimes b = s_1 \otimes b_1$. 又 B 是主弱平坦的,所以在 $s_1S \otimes B$ 中有 $s_1 \otimes b = s_1 \otimes b_1$. 因此存在 $u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S$, $b_2, \cdots, b_n \in B$,使得

$$s_1 = s_1 u_1,$$
$$s_1 v_1 = s_1 u_1, \qquad u_1 b = v_1 b_2,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$s_1 v_n = s_1, \qquad u_n b_n = v_n b_1.$$

所以在 $aS \otimes B$ 中有

$$\begin{aligned} a \otimes b &= a_1 s_1 \otimes b = a_1 s_1 u_1 \otimes b = a u_1 \otimes b = a \otimes u_1 b \\ &= a \otimes v_1 b_2 = a v_1 \otimes b_2 = \cdots = a v_n \otimes b_1 \\ &= a_1 s_1 v_n \otimes b_1 = a_1 s_1 \otimes b_1 = a \otimes b_1. \end{aligned}$$ //

引理 3.2 设 A 是任意右 S- 系，B 是弱平坦左 S- 系．若 $a, a' \in A, b, b' \in B$，满足

$$a = a_1 s_1,$$
$$a_1 t_1 = a', \qquad s_1 b = t_1 b',$$

其中 $s_1, t_1 \in S, a_1 \in A$，则在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$.

证明 因为 B 是弱平坦的，所以由定理 4.5.2 知存在 $p, q \in S, b'' \in B$，使得 $s_1 p = t_1 q$ 且 $s_1 b = t_1 b' = s_1 p b'' = t_1 q b''$．由引理 3.1 知在 $aS \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a \otimes p b'' = ap \otimes b''$．同理在 $a'S \otimes B$ 中有 $a' \otimes b' = a'q \otimes b''$．而 $ap = a_1 s_1 p = a_1 t_1 q = a'q$，所以在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$. //

设 $x, y \in S$．记 $\rho(x, y)$ 为 S 上的由 (x, y) 生成的最小右同余．

定理 3.3 设 S 是右 PSF 幺半群，且对于任意 $u, v \in S$，存在 $z \in Su \cap Sv$，使得 $(z, u) \in \rho(u, v)$，则所有弱平坦 S- 系是平坦的．

证明 设 B 是弱平坦 S- 系，A 是任意右 S- 系，$a, a' \in A, b, b' \in B$，在 $A \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$．要证明在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$．由定理 4.1.2 知存在 $a_1, \cdots, a_n \in A, b_2, \cdots, b_n \in B, s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$，使得

$$a = a_1 s_1,$$

$$a_1 t_1 = a_2 s_2, \qquad s_1 b = t_1 b_2,$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$a_n t_n = a', \qquad s_n b_n = t_n b'.$$

对 n 使用数学归纳法证明结论.

设 $n = 1$. 此时有

$$a = a_1 s_1,$$

$$a_1 t_1 = a', \qquad s_1 b = t_1 b'.$$

所以由引理 3.2 即知在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$.

设 $n \geqslant 2$. 令 $b_1 = b, b_{n+1} = b'$. 对于 $s_i b_i = t_i b_{i+1}$,考察定理 4.5.5 的证明过程,可知存在 $u_i, v_i, x_i, y_i \in S, b_i'' \in B$,使得

$$s_i u_i = s_i, t_i v_i = t_i, s_i x_i = t_i y_i,$$

$$u_i b_i = u_i x_i b_i'', v_i b_{i+1} = v_i y_i b_i''.$$

对于 u_{i+1} 和 v_i,由条件知存在 $p_i, q_i \in S$,使得

$$p_i v_i = q_i u_{i+1},$$

且 $(q_i u_{i+1}, u_{i+1}) \in \rho(u_{i+1}, v_i)$. 定义

$$\rho_i = \{(s,t) \in S \times S \mid a_{i+1} s_{i+1} s = a_{i+1} s_{i+1} t\},$$

则 ρ_i 是 S 上的右同余. 因为 $a_{i+1} s_{i+1} u_{i+1} = a_{i+1} s_{i+1} = a_i t_i = a_i t_i v_i = a_{i+1} s_{i+1} v_i$,所以 $(u_{i+1}, v_i) \in \rho_i$. 因此由条件知 $(q_i u_{i+1}, u_{i+1}) \in \rho_i$,故有

$$a_{i+1} s_{i+1} q_i u_{i+1} = a_{i+1} s_{i+1} u_{i+1} = a_{i+1} s_{i+1}.$$

因此

$$(a_i s_i) q_{i-1} u_i x_i = a_i s_i x_i = a_i t_i y_i = a_{i+1} s_{i+1} y_i$$
$$= a_{i+1} s_{i+1} q_i u_{i+1} y_i = a_{i+1} s_{i+1} p_i v_i y_i,$$

$$p_{i-1} v_{i-1} y_{i-1} b_{i-1}'' = p_{i-1}(v_{i-1} b_i) = q_{i-1} u_i b_i$$
$$= q_{i-1} u_i x_i b_i''.$$

又因为

$$au_1x_1 = a_1s_1u_1x_1 = a_1s_1x_1 = a_1t_1y_1 = a_2s_2y_1$$
$$= a_2s_2q_1u_2y_1 = (a_2s_2)p_1v_1y_1,$$
$$(a_ns_n)q_{n-1}u_nx_n = a_ns_nx_n = a_nt_ny_n$$
$$= a_nt_nv_ny_n = a'v_ny_n,$$

所以有如下的等式组：

$a = au_1$

$au_1x_1 = (a_2s_2)p_1v_1y_1,\qquad u_1b = u_1x_1b_1'',$

$(a_2s_2)q_1u_2x_2 = (a_3s_3)p_2v_2y_2,\qquad p_1v_1y_1b_1'' = q_1u_2x_2b_2'',$

……　　……

$(a_is_i)q_{i-1}u_ix_i = (a_{i+1}s_{i+1})p_iv_iy_i, p_{i-1}v_{i-1}y_{i-1}b_{i-1}'' = q_{i-1}u_ix_ib_i'',$

……　　……

$(a_ns_n)q_{n-1}u_nx_n = a'v_ny_n,\qquad p_{n-1}v_{n-1}y_{n-1}b_{n-1}'' = q_{n-1}u_nx_nb_n'',$

$a'v_n = a',\qquad v_ny_nb_n'' = v_nb'.$

对于上述等式组中的中间 $2n-1$ 个等式应用归纳假定可知在 $(au_1x_1S) \cup (a'v_ny_nS) \otimes B$ 中有

$$au_1x_1 \otimes b_1'' = a'v_ny_n \otimes b_n''.$$

利用最前面的两行等式可知在 $aS \otimes B$ 中有

$$a \otimes b = a_2s_2p_1v_1y_1 \otimes b_1''.$$

同理可知在 $a'S \otimes B$ 中有

$$a' \otimes b' = a_ns_nq_{n-1}u_nx_n \otimes b_n''.$$

于是在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有

$$a \otimes b = a_2s_2p_1v_1y_1 \otimes b_1'' = au_1x_1 \otimes b_1'' = a'v_ny_n \otimes b_n''$$
$$= a_ns_nq_{n-1}u_nx_n \otimes b_n'' = a' \otimes b'.$$

这就证明了 B 是平坦左 S- 系. //

定理 3.4 设 S 是右 PP 幺半群，且对于任意 $u,v \in E(S)$，存在 $z \in Su \cap Sv$，使得 $(z,u) \in \rho(u,v)$，则所有弱平坦 S- 系是平坦

的.

证明　考察定理 3.3 的证明过程. 由推论 4.5.5 知当 S 是右 PP 幺半群时, 上述证明过程中的 u_i, v_i 都是幂等元. 所以类似于定理 3.3 的证明即可完成本定理的证明. //

推论 3.5　设所有右 S- 系都是弱平坦的, 则所有弱平坦左 S- 系是平坦的.

证明　由定理 4.5.12 和定理 3.3 即得结论. //

推论 3.6　若所有左、右 S- 系都是弱平坦的, 则所有左、右 S- 系都是平坦的.

证明　由推论 3.5 即得本结论. //

设 S 是幺半群, B 是弱平坦 S- 系, A 是任意右 S- 系, $a, a' \in A$, $b, b' \in B$, 在 $A \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$. 对于特殊的幺半群 S, 为证明 B 是平坦的, 只需证明在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$ 即可. 由定理 4.1.2 知存在 $a_1, \cdots, a_n \in A$, $b_2, \cdots, b_n \in B$, $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$, 使得

$$\begin{aligned}
&a = a_1 s_1, && \\
&a_1 t_1 = a_2 s_2, && s_1 b = t_1 b_2, \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots \\
&a_i t_i = a_{i+1} s_{i+1}, && s_i b_i = t_i b_{i+1}, \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots \\
&a_n t_n = a', && s_n b_n = t_n b'.
\end{aligned}$$

由引理 3.2 知当 $n = 1$ 时结论成立. 因此可以利用数学归纳法来完成证明. 如果 $a_i t_i = a_{i+1} s_{i+1} \in aS \cup a'S$, $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, 那么使用两次归纳假定即知在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a_i t_i \otimes b_{i+1} = a' \otimes b'$. 特别地, 如果 $t_1 \in s_1 S$ 或者 $s_n \in t_n S$, 则在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$. 如果某个 $s_i = 1$, $i \in \{2, \cdots, n\}$, 则有如下的等式组:

$$
\begin{aligned}
&a = a_1 s_1, \\
&a_1 t_1 = a_2 s_2, && s_1 b = t_1 b_2, \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots \\
&a_{i-1}(t_{i-1}t_i) = a_{i+1}s_{i+1}, && s_{i-1}b_{i-1} = (t_{i-1}t_i)b_{i+1}, \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots \\
&a_n t_n = a', && s_n b_n = t_n b'.
\end{aligned}
$$

所以由归纳假定即知结论成立. 如果某个 $t_i = 1, i \in \{1,\cdots,n-1\}$,同上类似的证明即知结论成立.

下面利用上述讨论给出几个定理.

定理 3.7 设 S 是(带零)半群,且是其极小(带零)右理想的并,则任意弱平坦 S^1- 系是平坦的.

证明 设 B 是弱平坦 S^1- 系, A 是任意右 S^1- 系, $a, a' \in A, b, b' \in B$,在 $A \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$. 所以存在 $a_1, \cdots, a_n \in A, b_2, \cdots, b_n \in B, s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S^1$,使得

$$
\begin{aligned}
&a = a_1 s_1, \\
&a_1 t_1 = a_2 s_2, && s_1 b = t_1 b_2, \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots \\
&a_n t_n = a', && s_n b_n = t_n b'.
\end{aligned}
$$

要用数学归纳法证明在 $(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$.

由上述讨论知,可假定 $n \geqslant 2$,且 s_1, t_1, s_n, t_n 都不是 1.

首先假定 S 不含零元. 此时对任意 $x \in S$ 有 $xS = xS^1$. 对于等式 $s_1 b = t_1 b_2$,利用定理 4.5.2 知存在 $z \in s_1 S^1 \cap t_1 S^1 = s_1 S \cap t_1 S$, $b'' \in B$,使得 $s_1 b = t_1 b_2 = z b''$. 所以 $s_1 S \cap t_1 S \neq \varnothing$. 由条件即知 $s_1 S = t_1 S$,从而 $t_1 \in s_1 S^1$,由前面的讨论即知结论成立.

下设 S 带有零元. 如果 $s_1 S^1 \cap t_1 S^1 \neq \{0\}$,那么 $t_1 \in s_1 S^1$,因此结论成立. 如果 $s_n S^1 \cap t_n S^1 \neq \{0\}$,则类似的讨论即可完成证明. 下设 $s_1 S^1 \cap t_1 S^1 = s_n S^1 \cap t_n S^1 = \{0\}$. 由定理 4.5.2 知存在 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_n$,

$\beta_n \in S^1, c_1, c_n \in B$,使得 $s_1\alpha_1 = t_1\beta_1 = 0 = s_n\alpha_n = t_n\beta_n, s_1b = t_1b_2 = 0c, s_nb_n = t_nb' = 0c_n$. 因为 $a = a_1s_1, s_1b = s_1\alpha_1c$,所以由引理 3.1 知在 $aS^1 \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a \otimes \alpha_1c$. 同理在 $a'S^1 \otimes B$ 中有 $a' \otimes b' = a' \otimes \beta_nc_n$. 从上述等式组容易得知 $0b = 0b'$,因此 $0c = 0s_1b = 0b = 0b' = 0t_nb' = 0c_n$. 又 $a\alpha_1 = a_1s_1\alpha_1 = a_10 = a0 = a'0 = a_n0 = a_nt_n\beta_n = a'\beta_n$,所以在 $(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$ 中有

$$\begin{aligned} a \otimes b &= a \otimes \alpha_1c = a\alpha_1 \otimes c = a0 \otimes c = a \otimes 0c \\ &= a \otimes 0c_n = a0 \otimes c_n = a'\beta_n \otimes c_n \\ &= a' \otimes \beta_nc_n = a' \otimes b'. \end{aligned}$$

//

推论 3.8 设 S 是完全(0-)单半群,则任意弱平坦 S^1-系是平坦的.

定理 3.9 设 S 是交换幺半群,且其所有主理想形成链,则任意弱平坦 S-系是平坦的.

证明 设 B 是弱平坦 S-系,A 是任意右 S-系,$a, a' \in A, b, b' \in B$,在 $A \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$,则存在 $a_1, \cdots, a_n \in A, b_2, \cdots, b_n \in B, s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$,使得

$$\begin{array}{ll} a = a_1s_1, & \\ a_1t_1 = a_2s_2, & s_1b = t_1b_2, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i-1}t_{i-1} = a_is_i, & s_{i-1}b_{i-1} = t_{i-1}b_i, \\ a_it_i = a_{i+1}s_{i+1}, & s_ib_i = t_ib_{i+1}, \\ a_{i+1}t_{i+1} = a_{i+2}s_{i+2}, & s_{i+1}b_{i+1} = t_{i+1}b_{i+2}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_nt_n = a', & s_nb_n = t_nb'. \end{array}$$

对 n 用数学归纳法证明在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$.

$n = 1$ 时,由引理 3.2 知结论成立.

设 $n \geqslant 2$. 为了方便起见,令 $a_0 = a, a_{n+1} = a', b_1 = b, b_{n+1} = b'$,

$t_0 = 1, s_{n+1} = 1$. 设 $s_i \in t_iS$，这里 $i \in \{1, \cdots, n-1\}$. 如果还有 $s_{i+1} \in t_iS$，则存在 $x, y \in S$，使得 $s_i = t_ix, s_{i+1} = t_iy$. 所以 $a_{i-1}t_{i-1} = a_is_i = a_it_ix = a_{i+1}s_{i+1}x, s_{i+1}xb_i = t_iyxb_i = yxt_ib_i = yt_ixb_i = ys_ib_i = yt_ib_{i+1} = s_{i+1}b_{i+1} = t_{i+1}b_{i+2}$. 因此上述框线以内的等式组可用下面的等式组来代替：

$$a_{i-1}t_{i-1} = a_{i+1}s_{i+1}x,$$
$$a_{i+1}t_{i+1} = a_{i+2}s_{i+2}, \qquad s_{i+1}xb_i = t_{i+1}b_{i+2}.$$

所以由归纳假定即知结论成立.

因此，当 $s_i \in t_iS$ 时，还可以假定 $t_i \in s_{i+1}S$. 同理，当 $t_i \in s_{i+1}S$ 时，还可假定 $s_{i+1} \in t_{i+1}S$.

设 $t_1 \in s_1S$，则由前面讨论知结论成立. 设 $s_1 \in t_1S$，则由上述讨论知可以假定 $t_1 \in s_2S$，进而可以假定 $s_2 \in t_2S, \cdots$，最后可以假定 $s_n \in t_nS$，所以由前面的讨论知结论成立. //

定理3.10 设 S 是交换幺半群，则任意循环的弱平坦 S-系是平坦的.

证明 设 $B = Sb$ 是循环的弱平坦 S-系，A 是任意右 S-系，$a, a' \in A$，在 $A \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b$. 只需证明在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b$ 即可. 由定理 4.1.2 易知存在 $a_1, \cdots, a_n \in A, s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$，使得

$$\begin{aligned}
a &= a_1s_1, & & \\
a_1t_1 &= a_2s_2, & s_1b &= t_1b, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
a_nt_n &= a', & s_nb &= t_nb.
\end{aligned}$$

对于任意 $i \in \{1, \cdots, n\}$，由定理 4.5.2 知存在 $\alpha_i, \beta_i \in S$，使得 $s_i\alpha_i = t_i\beta_i$ 且 $s_ib = t_ib = s_i\alpha_ib = t_i\beta_ib$. 令 $\beta_0 = 1, s_{n+1} = 1, a_{n+1} = a'$. 下面对 i 用数学归纳法证明如下论断：

对任意 $i \in \{1, \cdots, n\}, a_{i+1}s_{i+1}\beta_1 \cdots \beta_i \in aS$ 且在 $aS \otimes Sb$ 中有

$a_i s_i \beta_1 \cdots \beta_{i-1} \otimes b = a_{i+1} s_{i+1} \beta_1 \cdots \beta_i \otimes b.$

设 $i = 1$. 因为 $a = a_1 s_1, s_1 b = s_1(\alpha_1 b)$，所以由引理 3.1 知在 $aS \otimes Sb$ 中有 $a \otimes b = a \otimes \alpha_1 b$. 显然，$a_2 s_2 \beta_1 = a_1 t_1 \beta_1 = a_1 s_1 \alpha_1 = a\alpha_1 \in aS$，所以在 $aS \otimes Sb$ 中有

$$a_1 s_1 \beta_0 \otimes b = a \otimes b = a \otimes \alpha_1 b$$
$$= a_1 s_1 \alpha_1 \otimes b = a_2 s_2 \beta_1 \otimes b.$$

因为 $a_{i+1} s_{i+1} \beta_1 \cdots \beta_i = a_{i+1}(s_{i+1}\beta_1 \cdots \beta_i)$，$(s_{i+1}\beta_1 \cdots \beta_i)b = \beta_1 \cdots \beta_i s_{i+1} b = \beta_1 \cdots \beta_i s_{i+1} \alpha_{i+1} b = (s_{i+1}\beta_1 \cdots \beta_i)\alpha_{i+1} b$，所以由引理 3.1 知在 $a_{i+1} s_{i+1} \beta_1 \cdots \beta_i S \otimes Sb$ 中有

$$a_{i+1} s_{i+1} \beta_1 \cdots \beta_i \otimes b = a_{i+1} s_{i+1} \beta_1 \cdots \beta_i \otimes \alpha_{i+1} b.$$

又 $a_{i+1} s_{i+1} \beta_1 \cdots \beta_i \alpha_{i+1} = a_{i+1} s_{i+1} \alpha_{i+1} \beta_1 \cdots \beta_i = a_{i+1} t_{i+1} \beta_{i+1} \beta_1 \cdots \beta_i = a_{i+2} s_{i+2} \beta_1 \cdots \beta_i \beta_{i+1}$，所以由归纳假定即知结论成立.

因此，在 $aS \otimes Sb$ 中有

$$a \otimes b = a_2 s_2 \beta_1 \otimes b = \cdots = a_n s_n \beta_1 \cdots \beta_{n-1} \otimes b$$
$$= a_{n+1} s_{n+1} \beta_1 \cdots \beta_n \otimes b = a' \beta_1 \cdots \beta_n \otimes b.$$

同理在 $a'S \otimes Sb$ 中有

$$a' \otimes b = a\alpha_1 \cdots \alpha_n \otimes b.$$

因为

$$a\alpha_1 \cdots \alpha_n = a_1 s_1 \alpha_1 \cdots \alpha_n = a_1 t_1 \beta_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$$
$$= a_2 s_2 \beta_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = a_2 s_2 \alpha_2 \cdots \alpha_n \beta_1$$
$$= a_2 t_2 \beta_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n \beta_1 = \cdots = a_n t_n \beta_n \beta_1 \cdots \beta_{n-1}$$
$$= a' \beta_1 \cdots \beta_n,$$

所以在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b$. //

§4 左绝对平坦幺半群

定义 4.1 称幺半群 S 是绝对平坦的，如果所有 S- 系是平坦

的.

设 S 是群，则由定理 4.2.8 知所有 S- 系满足条件(P)，从而所有 S- 系是平坦的，所以任意群是左绝对平坦的.

如何用元素、理想等给出左绝对平坦幺半群的特征刻画，至今仍是一个没有解决的问题. 本节要证明 S 是左绝对平坦的当且仅当任意有限生成 S- 系是平坦的，同时还要给出左绝对平坦幺半群的若干等价刻画.

设 n 是自然数，以 S^{2n} 表示 $2n$ 个集合 S 的卡氏积，即

$$S^{2n}=S\times S\times\cdots\times S$$
$$=\{(s_1,\cdots,s_n,t_1,\cdots,t_n)\mid s_i,t_i\in S\}.$$

设 $\bigcup_{i=1}^{n}x_iS$ 是 n 个生成元的自由右 S- 系，$\bigcup_{j=1}^{n+1}Sy_j$ 是 $n+1$ 个生成元的自由左 S- 系. 对任意 $\alpha=(s_1,\cdots,s_n,t_1,\cdots,t_n)\in S^{2n}$，令

$$H_\alpha=\{(x_1t_1,x_2s_2),\cdots,(x_{n-1}t_{n-1},x_ns_n)\},$$

$$K_\alpha=\{(s_1y_1,t_1y_2),\cdots,(s_ny_n,t_ny_{n+1})\},$$

$$F_\alpha=(\bigcup_{i=1}^{n}x_iS)/\rho(H_\alpha),$$

$$G_\alpha=(\bigcup_{j=1}^{n+1}Sy_j)/\lambda(K_\alpha),$$

这里 $\rho(H_\alpha)$，$\lambda(K_\alpha)$ 分别表示 $\bigcup_{i=1}^{n}x_iS$ 和 $\bigcup_{j=1}^{n+1}Sy_j$ 上的由 H_α，K_α 生成的最小同余.

一个显然的事实是：在张量积 $F_\alpha\otimes G_\alpha$ 中有：$\overline{x_1}s_1\otimes\overline{y_1}=\overline{x_1}\otimes s_1\overline{y_1}=\overline{x_1}\otimes t_1\overline{y_2}=\overline{x_1}t_1\otimes\overline{y_2}=\overline{x_2}s_2\otimes\overline{y_2}=\cdots=\overline{x_n}s_n\otimes\overline{y_n}=\overline{x_n}\otimes s_n\overline{y_n}=\overline{x_n}\otimes t_n\overline{y_{n+1}}=\overline{x_n}t_n\otimes\overline{y_{n+1}}$，这里 $\overline{x}$ 表示 x 所在的同余类.

定理 4.2 对于幺半群 S，以下几条等价：

(1) S 是左绝对平坦的；

(2) 所有有限生成 S- 系是平坦的；

(3) 所有有限表示 S- 系是平坦的；

(4) 对任意自然数 n，任意 $\alpha=(s_1,\cdots,s_n,t_1,\cdots,t_n)\in S^{2n}$，在 $(\overline{x_1}s_1S\cup\overline{x_n}t_nS)\otimes G_\alpha$ 中有 $\overline{x_1}s_1\otimes\overline{y_1}=\overline{x_n}t_n\otimes\overline{y_{n+1}}$.

证明 (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4) 是显然的，只需证明(4)⇒(1).

设 A 是右 S- 系，B 是左 S- 系，$a,a'\in A$，$b,b'\in B$，在 $A\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$. 由定理 4.1.2 知存在 $a_1,\cdots,a_n\in A$，$b_2,\cdots,b_n\in B$，$s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$，使得

$$
\begin{aligned}
&a=a_1s_1, \\
&a_1t_1=a_2s_2, \qquad && s_1b=t_1b_2, \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots \\
&a_nt_n=a', && s_nb_n=t_nb'.
\end{aligned}
$$

令 $\alpha=(s_1,\cdots,s_n,t_1,\cdots,t_n)\in S^{2n}$. 利用条件(4) 知存在 $z_1,\cdots,z_m\in x_1s_1S\cup x_nt_nS$，$w_2,\cdots,w_m\in G_\alpha$，$u_1,v_1,\cdots,u_m,v_m\in S$，使得

$$
\begin{aligned}
&\overline{x_1}s_1=\overline{z_1}u_1, \\
&\overline{z_1}v_1=\overline{z_2}u_2, \qquad && u_1\overline{y_1}=v_1\overline{w_2}, \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots \\
&\overline{z_m}v_m=\overline{x_n}t_n, && u_m\overline{w_m}=v_m\overline{y_{n+1}}.
\end{aligned}
\tag{$*$}
$$

显然可以假定 $z_1,\cdots,z_m\in\{x_1s_1,x_nt_n\}$.

定义 S- 同态 $\varphi_1:\bigcup_{i=1}^{n}x_iS\to A$ 和 $\varphi_2:\bigcup_{j=1}^{n+1}Sy_j\to B$ 为

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(x_is)=a_is, \quad \forall\, i\in\{1,\cdots,n\},\forall\, s\in S; \\
&\varphi_2(sy_j)=sb_j, \quad \forall\, j\in\{2,\cdots,n\},\forall\, s\in S, \\
&\varphi_2(sy_1)=sb,\varphi_2(sy_{n+1})=sb', \quad \forall\, s\in S.
\end{aligned}
$$

显然 $H_\alpha\subseteq\mathrm{Ker}\varphi_1$，$K_\alpha\subseteq\mathrm{Ker}\varphi_2$，所以 $\rho(H_\alpha)\subseteq\mathrm{Ker}\varphi_1$，$\lambda(K_\alpha)\subseteq\mathrm{Ker}\varphi_2$. 因此 φ_1 和 φ_2 分别诱导出 S- 同态 $\overline{\varphi_1}:F_\alpha\to A$，$\overline{\varphi_2}:G_\alpha\to B$. 用 $\overline{\varphi_1}$ 和 $\overline{\varphi_2}$ 作用于等式组($*$)即得

$$
\begin{aligned}
&a=a_1s_1=\overline{\varphi_1}(\overline{z_1})u_1, \\
&\overline{\varphi_1}(\overline{z_1})v_1=\overline{\varphi_1}(\overline{z_2})u_2, \qquad && u_1b=v_1\,\overline{\varphi_2}(\overline{w_2}),
\end{aligned}
$$

……　　　　　　　　　　……

$$\overline{\varphi_1}(\overline{z_m})v_m = a_n t_n = a', \qquad u_m \overline{\varphi_2}(\overline{w_m}) = v_m b'.$$

因为 $z_i \in \{x_1 s_1, x_n t_n\}$，所以$\overline{\varphi_1}(\overline{z_i}) \in \{a, a'\}, i = 1, \cdots, m$. 因此在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$. 故 B 是平坦的. 从而 S 是左绝对平坦幺半群. //

由第四章 §5 的结果可知，所有 S- 系是(主) 弱平坦的当且仅当所有循环 S- 系是(主) 弱平坦的. 但对于平坦性，类似的结果不成立，即当所有循环 S- 系都是平坦系时，可以有非平坦的 S- 系存在. 为了说明这一点，先证明下面的定理.

定理 4.3　设 $S = \dot{\bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma}} S_\alpha$，其中 Γ 是链，每个 S_α 是右零带，则以下两条是等价的：

(1) 所有循环 S- 系是平坦的；

(2) 设 $\alpha, \beta \in \Gamma, \alpha < \beta$，则 S_β 中的任意两个元素在 S_α 中有下界.

证明　(1)⇒(2)　设 $\alpha, \beta \in \Gamma, \alpha < \beta, a, b \in S_\beta$. 对任意 $u, v \in S$，以 $\rho(u,v)$ 和 $\lambda(u,v)$ 分别表示 S 上的由 (u,v) 生成的最小右、左同余. 设 $t \in S_\alpha$，则在 $S/\rho(a,b) \otimes S/(\lambda(a,ta) \vee \lambda(b,tb))$ 中有 $\overline{ta} \otimes \overline{1} = \overline{1} \otimes \overline{ta} = \overline{1} \otimes \overline{a} = \overline{a} \otimes \overline{1} = \overline{b} \otimes \overline{1} = \overline{1} \otimes \overline{b} = \overline{1} \otimes \overline{tb} = \overline{tb} \otimes \overline{1}$，这里 $\overline{u}$ 表示 u 所在的 $\rho(a,b)$- 类或 $\lambda(a,ta) \vee \lambda(b,tb)$- 类. 记 $S_{(\alpha]} = \dot{\bigcup\limits_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \leqslant \alpha}}} S_\gamma$，则 $S_{(\alpha]}$ 是 S 的右理想. 作 S- 同态 $\varphi: S_{(\alpha]} \to S/\rho(a,b)$ 为：$\varphi(s) = \bar{s}, \forall s \in S_{(\alpha]}$. 设 $s, t \in S_{(\alpha]}$，且 $\varphi(s) = \varphi(t)$，则 $s\rho(a,b)t$. 所以 $s = t$，或存在 $t_1, \cdots, t_n \in S$，使得

$$s = c_1 t_1, d_1 t_1 = c_2 t_2, \cdots, d_n t_n = t,$$

其中 $\{c_i, d_i\} = \{a, b\}, i = 1, \cdots, n$. 设 $s \in S_\delta, \delta \leqslant \alpha$，则容易得出 $t_1 \in S_\delta$. 由于 S_δ 是右零带，所以 $s = c_1 t_1 = (c_1 t_1) t_1 = t_1$. 同理 $d_1 t_1 = c_2 t_2 \in S_\delta, t_2 \in S_\delta$，所以 $t_1 = (d_1 t_1) t_1 = d_1 t_1 = c_2 t_2 = (c_2 t_2) t_2 = t_2$.

类似地可以证明 $t_2 = t_3 = \cdots = t_n = t$. 所以 $s = t$. 这说明 φ 是单同态. 因为 $S/(\lambda(a,ta) \vee \lambda(b,tb))$ 是平坦的,所以在 $S_{(a]} \otimes S/(\lambda(a,ta) \vee \lambda(b,tb))$ 中有 $ta \otimes \bar{1} = tb \otimes \bar{1}$. 利用定理4.1.2容易证明 $(ta, tb) \in \lambda(a,ta) \vee \lambda(b,tb)$. 所以 $ta = tb$,或者存在 $s_1, \cdots, s_n \in S$, $(x_i, y_i) \in \{(a,ta),(b,tb),(ta,a),(tb,b)\}$,使得

$$ta = s_1 x_1,$$
$$s_1 y_1 = s_2 x_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$s_n y_n = tb.$$

记 ta 为 $s_0 y_0$,则存在 $i \in \{0,1,\cdots,n\}$,使得 $s_i y_i \in Sa \cap Sb$. 所以 $ts_i y_i \in S_a$ 是 a 和 b 的下界.

(2)⇒(1) 设 Sb 是任意循环 S-系,A 是右 S-系,$a, a' \in A$,在 $A \otimes Sb$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b$,则存在 $a_1, \cdots, a_n \in A$, $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$,使得

$$\begin{aligned} a &= a_1 s_1, & & \\ a_1 t_1 &= a_2 s_2, & s_1 b &= t_1 b, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ a_n t_n &= a', & s_n b &= t_n b. \end{aligned}$$

下面对 n 利用数学归纳法证明在 $(aS \cup a'S) \otimes Sb$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b$.

$n = 1$ 时,由等式组

$$\begin{aligned} a &= (as_1)s_1, & & \\ (as_1)t_1 &= (a's_1)t_1, & s_1 b &= t_1 b', \\ (a's_1)s_1 &= a's_1, & t_1 b' &= s_1 b, \\ a't_1 &= a', & s_1 b &= t_1 b'. \end{aligned}$$

即知在 $(aS \cup a'S) \otimes Sb$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b$,这里第二个等式是如下证明的:$(as_1)t_1 = a_1 s_1 t_1 = a_1 t_1 s_1 t_1 = a' s_1 t_1$.

设 $n \geqslant 2$. 假定 $s_1 \in S_\alpha, t_1 s_2 \cdots t_{n-1} s_n \in S_\beta, t_n \in S_\delta$. 如果 $\alpha \geqslant \beta$，则 $s_1 t_1 s_2 \cdots t_{n-1} s_n \in S_\beta$. 又因为 Γ 是链，所以存在 t_i 或 $s_{i+1}(i=1,\cdots,n-1)$，使得 $t_i \in S_\beta$ 或 $s_{i+1} \in S_\beta$. 不妨设 $t_i \in S_\beta$. 因为 S_β 是右零带，所以有

$$t_i = s_1 t_1 s_2 \cdots t_{n-1} s_n t_i.$$

因此，若 $i=1$，则 $a_1 t_1 = a_1 s_1 t_1 s_2 \cdots t_{n-1} s_n t_1 = a t_1 s_2 \cdots t_{n-1} s_n t_1 \in aS \cup a'S$. 设 $i \geqslant 2$，则

$$\begin{aligned} a_i t_i &= a_i s_1 t_1 s_2 \cdots t_{i-1} s_i \cdots t_{n-1} s_n t_i \\ &= a_i s_i (s_1 t_1 s_2 \cdots t_{i-1}) s_i \cdots t_{n-1} s_n t_i \\ &= a_{i-1} t_{i-1} s_1 t_1 s_2 \cdots s_{i-1} t_{i-1} s_i \cdots t_{n-1} s_n t_i \\ &= a_{i-1} s_{i-1} (t_{i-1} s_1 t_1 s_2 \cdots) s_{i-1} t_{i-1} \cdots t_{n-1} s_n t_i \\ &= \cdots \\ &= a_1 s_1 \cdots t_{n-1} s_n t_i \in aS \cup a'S. \end{aligned}$$

若 $s_{i+1} \in S_\beta$，则同样有

$$\begin{aligned} a_i t_i &= a_{i+1} s_{i+1} = a_{i+1} s_1 t_1 s_2 \cdots t_{n-1} s_n s_{i+1} \\ &= a_{i+1} s_{i+1} s_1 t_1 s_2 \cdots s_{i+1} \cdots t_{n-1} s_n s_{i+1} \\ &\in aS \cup a'S. \end{aligned}$$

总之，当 $\alpha \geqslant \beta$ 时，存在 $i \in \{1,\cdots,n-1\}$，使得 $a_i t_i \in aS \cup a'S$. 考虑等式组

$$\begin{array}{ll} a = a_1 s_1, & \\ a_1 t_1 = a_2 s_2, & s_1 b = t_1 b, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_i t_i = a_{i+1} s_{i+1}, & s_i b = t_i b \end{array}$$

和

$$\begin{array}{ll} a_i t_i = a_{i+1} s_{i+1}, & \\ a_{i+1} t_{i+1} = a_{i+2} s_{i+2}, & s_{i+1} b = t_{i+1} b, \end{array}$$

$\cdots\cdots$ $\qquad\qquad$ $\cdots\cdots$

$$a_n t_n = a', \qquad\qquad s_n b = t_n b,$$

由归纳假定可知在$(aS \cup a'S) \otimes Sb$中有$a \otimes b = a_{i+1}s_{i+1} \otimes b = a_i t_i \otimes b = a' \otimes b$.

同理,若$\delta \geqslant \beta$,则结论亦成立.因此假定$\alpha < \beta, \delta < \beta$.再不妨设$\alpha \geqslant \delta$.任取$x \in S_\beta$,则$xt_1, xs_n \in S_\beta$.所以由(2)知存在$y \in S_\alpha$,使得$yxt_1 = y = yxs_n$.显然$yx \in S_\alpha$,而$S_\alpha$是右零带,所以$(yx)s_1 = s_1$.又$S_\delta$是右零带,所以$(yxt_n)t_n = t_n$.因此有$s_1 b = yxs_1 b = yxt_1 b = yb = yxs_n b = yxt_n b = (yxt_n)t_n b = t_n b$.故有等式组

$$a = as_1,$$

$$at_n = a', \qquad\qquad s_1 b = t_n b.$$

所以由归纳假定知在$(aS \cup a'S) \otimes Sb$中$a \otimes b = a' \otimes b$.

因此Sb是平坦的. //

下面给出一个所有循环S-系都平坦但不是左绝对平坦幺半群的例子.

例4.4 设$X = \{1,2,3,4,5,6\}$,$\alpha_i (i = 1,\cdots,6)$,$\beta,\gamma,\delta$是$X$上的映射,其定义如下:

$$\alpha_i(x) = i, \quad \forall\, x \in X, i = 1,2,\cdots,6,$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

设ε是X上的单位映射,则$S = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$是$\mathscr{T}_X$的子幺半群.设$\Gamma = \{0,1,2\}$是链,其序规定为$0 < 1 < 2$.令$S_0 = \{\alpha_1,\cdots,\alpha_6\}$,$S_1 = \{\beta,\gamma,\delta\}$,$S_2 = \{\varepsilon\}$,则$S_0,S_1,S_2$均为右零

带. 容易验证 S 满足定理 4.3 中的(2),所以任意循环 S- 系是平坦的. 又因为 S_1 中的三个元素在 S_0 中没有下界,所以由第六章 §4 的结果知 S 不是左绝对平坦幺半群.

§5 循环系的平坦性与条件(P)

这一节以及下两节考虑循环 S- 系的平坦性、强平坦性及条件(P) 等性质,主要目的是研究所有循环平坦系满足条件(P) 的幺半群以及所有循环平坦系是强平坦系的幺半群.

命题 5.1 设 I 是 S 的真左理想,则 S/λ_I 满足条件(P) 当且仅当 $|I| = 1$.

证明 若 $|I| = 1$,则 $S/\lambda_I \simeq S$,所以满足条件(P).

反过来,设 S/λ_I 满足条件(P). 取 $x, y \in I$,则 $x\lambda_I y$. 所以由命题 1.1 知存在 $u, v \in S$,使得 $xu = yv$,且 $u\lambda_I 1\lambda_I v$. 因为 I 是 S 的真左理想,所以 $1 \notin I$. 因此 $u = 1 = v$,从而 $x = y$. 所以 $|I| = 1$. //

命题 5.2 设 $x \in S$,则 $S/\lambda(x, x^2)$ 满足条件(P) 当且仅当 $x = x^2$ 或 x 是左可逆元.

证明 若 $x = x^2$,则 $S/\lambda(x, x^2) \simeq S$,所以满足条件(P). 若 x 是左可逆元,则 $\lambda(x, x^2) = \lambda(1, x)$,所以由命题 1.3 知 $S/\lambda(x, x^2)$ 满足条件(P).

反之,设 $S/\lambda(x, x^2)$ 满足条件(P),且 $x \neq x^2$,因为 $x\lambda(x, x^2)x^2$,所以由命题 1.1 知存在 $s, t \in S$,使得 $xs = x^2 t$,且 $s\lambda(x, x^2)1\lambda(x, x^2)t$,设 $s \neq 1$,则由 $s\lambda(x, x^2)1$ 可知存在 $u, v \in S$,使得 $s = ux$, $1 = vx$,所以 x 是左可逆元. 设 $s = 1$,则 $t \neq 1$. 同理由 $t\lambda(x, x^2)1$ 知 x 是左可逆元. //

以下考虑所有循环(平坦)S-系满足条件(P)的幺半群，其主要结果选自[109]和[120].

定理 5.3 如下两条等价：

(1) 所有循环 S-系满足条件(P)；

(2) S 是群或带零群.

证明 (1)⇒(2) 设所有循环 S-系满足条件(P)，则对任意 $x \in S$，$x^2 = x$ 或 x 是左可逆元. 如果任意 $x \in S$ 都是左可逆元，则 S 是群. 设 x 不是左可逆的，则 Sx 是 S 的真左理想. 因为 S/λ_{Sx} 满足条件(P)，所以由命题 5.1 知 $|Sx| = 1$，即 x 是 S 的右零元.

设 I 是 S 的所有右零元构成的集合. 若 $I \neq \varnothing$，则 I 是 S 的左理想. 如果 $1 \in I$，则 $S = \{1\}$. 设 $1 \notin I$. 由于 S/λ_I 满足条件(P)，所以由命题 1.1 知 $|I| = 1$. 因此 S 包含唯一的右零元.

令 $G = S - \{0\}$，这里 0 是 S 的右零元. 如果 $G = \varnothing$，则 $S = \{1\}$. 设 $G \neq \varnothing$. 对任意 $x \in G$，x 是 S 的左可逆元. 取 $x, y \in G$. 如果 $xy = 0$，则 $y = x'xy = x'0 = 0$，矛盾，这里 x' 是 x 的左逆元. 所以 $xy \in G$，即 G 是 S 的子半群. 因为 $1 \in G$，所以 G 是 S 的子群. 设 $x \in G$，且 $0x \in G$，则 $0 = 0(xx') = (0x)x' \in G$，矛盾. 因此 $0x = 0$，即 0 是 S 的零元. 所以 $S = G \dot{\cup} \{0\}$.

(2)⇒(1) 若 S 是群，则由定理 4.2.8 知任意 S-系满足条件(P)，下设 $S = G \dot{\cup} \{0\}$，其中 G 是群. 设 λ 是 S 上的左同余，$s, t \in S$ 满足 $s\lambda t$. 要证明存在 $u, v \in S$，使得 $su = tv$ 且 $u\lambda 1\lambda v$. 若 $s = t = 0$，则取 $u = v = 1$. 若 $t \neq 0$，则 $t \in G$. 取 $u = 1, v = t^{-1}s$，则 $su = s = tt^{-1}s = tv$，且 $u\lambda 1$. 又从 $s\lambda t$ 即得 $v = t^{-1}s\lambda t^{-1}t = 1$. 若 $s \neq 0$，则采用类似的证明. 因此由命题 1.1 即知 S/λ 满足条件(P). //

在定理 4.4.10 中已经证明了所有循环 S-系是强平坦的当且仅当 $S = \{1\}$ 或 $S = \{1, 0\}$. 利用定理 5.3 和定理 1.5 可以给出上述结果的又一证明：设所有循环 S-系是强平坦的，则由定理 5.3

知 S 是群或带零群. 又所有满足条件(P)的循环 S- 系是强平坦的，所以由定理 1.5 知对 $x \in S$，存在自然数 n 使得 $x^{n+1} = x^n$. 所以 $S = \{1\}$ 或 $S = \{1,0\}$. 反过来的证明由定理 5.3 和定理 1.5 易得.

推论 5.4 S 是带零群的充要条件是：所有循环 S- 系满足条件(P)，但存在不满足条件(P) 的 S- 系.

证明 由定理 5.3 和定理 4.2.8 即得. //

由定理 2.3 知若所有平坦 S- 系满足条件(P)，则 $|E(S)| = 1$. 下面证明，若 S 的任意两个主右理想有非空的交，且所有循环平坦 S- 系满足条件(P)，则 $E(S) = \{1\}$ 或 $E(S) = \{1,0\}$. 为此先证明

定理 5.5 设 I 是 S 的真左理想，则如下三条是等价的：

(1) S/λ_I 是平坦的；

(2) $A(I)$ 是平坦的，且 S 的任意两个右理想有非空的交；

(3) 任意 $x \in I$，必有 $x \in xI$，且 S 的任意两个右理想有非空的交.

证明 由命题 2.2 即知(2)⇔(3).

(3)⇒(1) 设 A 是任意右 S- 系，$a, a' \in A$，在 $A \otimes S/\lambda_I$ 中有 $a \otimes \bar{1} = a' \otimes \bar{1}$. 要证明在 $(aS \cup a'S) \otimes S/\lambda_I$ 中有 $a \otimes \bar{1} = a' \otimes \bar{1}$. 由定理 4.1.2 知存在 $a_1, \cdots, a_n \in A, s_1, t_1, \cdots, S_n, t_n \in S$，使得

$$\begin{aligned} a &= a_1 s_1, & & \\ a_1 t_1 &= a_2 s_2, & \bar{s_1} &= \bar{t_1}, \\ a_2 t_2 &= a_3 s_3, & \bar{s_2} &= \bar{t_2}, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ a_n t_n &= a', & \bar{s_n} &= \bar{t_n}. \end{aligned} \qquad (*)$$

对 n 使用数学归纳法.

设 $n = 1$，则 $a = a_1 s_1, a' = a_1 t_1, \bar{s_1} = \bar{t_1}$. 若 $s_1 = t_1$，则 $a = a'$，所以在 $(aS \cup a'S) \otimes S/\lambda_I$ 中有 $a \otimes \bar{1} = a' \otimes \bar{1}$. 设 $s_1 \neq t_1$，则 $s_1, t_1 \in I$. 所以存在 $x, y \in I$，使得 $s_1 = s_1 x, t_1 = t_1 y$，又因为 $s_1 S \cap t_1 S$

$\neq \varnothing$,所以存在 $u,v \in S$,使得 $s_1u = t_1v$,所以有如下的等式组:

$$\begin{aligned} & a = ax, & & \\ & a(uy) = a'(vy), & & \overline{x} = \overline{uy}, \\ & a'y = a', & & \overline{vy} = \overline{y}. \end{aligned}$$

由此即知在 $(aS \cup a'S) \otimes S/\lambda_I$ 中有 $a \otimes \overline{1} = a' \otimes \overline{1}$.

设 $n \geqslant 2$. 若 $s_1 = t_1$ 或 $s_2 = t_2$,则等式组(*)可以用一个个数较少的等式组来代替,所以由归纳假定即知结论成立. 设 $s_1 \neq t_1$,且 $s_2 \neq t_2$,则 $s_1, t_1, t_2 \in I$. 所以存在 $x_1, y_1 \in I$,使得 $s_1 = s_1x_1, t_1 = t_1y_1$. 同样存在 $u,v \in S$,使得 $s_1u = t_1v$. 所以 $auy_1 = a_1s_1uy_1 = a_1t_1vy_1 = a_2s_2vy_1$. 故有如下的等式组:

$$\begin{aligned} & a = ax_1, & & \\ & a(uy_1) = a_2(s_2vy_1), & & \overline{x_1} = \overline{uy_1}, \\ & a_2t_2 = a_3s_3, & & \overline{s_2vy_1} = \overline{t_2}, \\ & \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ & a_nt_n = a', & & \overline{s_n} = \overline{t_n}. \end{aligned}$$

使用两次归纳假定可知在 $(aS \cup a_2s_2vy_1S) \otimes S/\lambda_I$ 中有 $a \otimes \overline{1} = a_2s_2vy_1 \otimes \overline{1}$;在 $(auy_1S \cup a'S) \otimes S/\lambda_I$ 中有 $auy_1 \otimes \overline{1} = a' \otimes \overline{1}$. 所以在 $(aS \cup a'S) \otimes S/\lambda_I$ 中有 $a \otimes \overline{1} = a' \otimes \overline{1}$. 故 S/λ_I 是平坦的.

(1)⇒(3) 设 $x \in I, y \in I$. 若 $x = xy$,则结论成立. 下设 $x \neq xy$. 在 $S \otimes S/\lambda_I$ 中显然有 $x \otimes \overline{1} = 1 \otimes \overline{x} = 1 \otimes \overline{xy} = xy \otimes \overline{1}$. 由于 S/λ_I 是平坦的,所以在 $(xS \cup xyS) \otimes S/\lambda_I$ 中有 $x \otimes \overline{1} = xy \otimes \overline{1}$. 因此存在 $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$,使得

$$\begin{aligned} & x = x_1s_1, & & \\ & x_1t_1 = x_2s_2, & & \overline{s_1} = \overline{t_1}, \\ & \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ & x_nt_n = xy, & & \overline{s_n} = \overline{t_n}, \end{aligned}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \{x, xy\}$. 若对任意 $i \in \{1, \cdots, n\}$ 都有 $s_i = t_i$,

则 $x = x_1s_1 = x_1t_1 = x_2s_2 = \cdots x_ns_n = s_nt_n = xy$,矛盾. 所以存在 i,使得 $s_1 = t_1,\cdots,s_i = t_i$,但 $s_{i+1} \neq t_{i+1}$,故 $s_{i+1},t_{i+1} \in I$. 因而 $x = x_1s_1 = x_1t_1 = \cdots = x_it_i = x_{i+1}s_{i+1}$. 由于 $x_{i+1} \in \{x,xy\}$,所以 $x \in xI$.

设 J_1,J_2 是 S 的两个右理想,取 $s \in J_1,t \in J_2,x \in I$,则在 $S \otimes S/\lambda_I$ 中有 $s \otimes \overline{x} = 1 \otimes \overline{sx} = 1 \otimes \overline{tx} = t \otimes \overline{x}$. 因为 S/λ_I 是平坦的,所以在 $(sS \cup tS) \otimes S/\lambda_I$ 中有 $s \otimes \overline{x} = t \otimes \overline{x}$. 因此存在 $u_1,v_1,\cdots,u_n,v_n \in S$,使得

$$\begin{aligned}
&s = s_1u_1, \\
&s_1v_1 = s_2u_2, \qquad \overline{u_1x} = \overline{v_1}, \\
&\cdots\cdots \qquad\qquad\quad \cdots\cdots \\
&s_nv_n = t, \qquad\quad \overline{u_n} = \overline{v_nx},
\end{aligned}$$

其中 $s_1,\cdots,s_n \in \{s,t\}$. 显然存在 i 使得 $s_i = s,s_{i+1} = t$,所以 $s_iv_i = s_{i+1}u_{i+1} \in sS \cap tS \subseteq J_1 \cap J_2$. //

定理 5.6 设 S 的任意两个右理想有非空的交. 如果所有循环平坦 S- 系满足条件(P),则 $E(S) = \{1\}$ 或 $E(S) = \{1,0\}$.

证明 设 $e^2 = e \neq 1$,则 Se 是 S 的真左理想. 对任意 $s \in S$,$se = see \in seSe$,所以由定理 5.5 知 S/λ_{Se} 是平坦的,从而由条件知 S/λ_{Se} 满足条件(P),由命题 5.1 即知 $|Se| = 1$. 所以 e 是 S 的右零元.

设 I 是 S 的所有右零元构成的集合. 若 $I \neq \varnothing$,则 I 是 S 的左理想. 若 $1 \in I$,则 $S = \{1\}$,故 $E(S) = \{1\}$. 设 $1 \notin I$,对任意 $e \in I$,显然有 $e \in eI$,所以由定理 5.5 知 S/λ_I 是平坦的,从而满足条件(P). 由命题 5.1 即知 $|I| = 1$,即 S 具有唯一的右零元,所以 S 含有零元.

如上的证明表明,若 $e^2 = e \neq 1$,则 $e = 0$. 所以 $E(S) = \{1,0\}$. //

例 5.7 考虑例 2.7 中定义的幺半群 S. 因为 S 是交换幺半

群，所以 S 的任意两个右理想有非空的交. 由例 2.7 知存在 S 的真左理想 J，使得对任意 $j \in J$，$j \in jJ$. 所以由定理 5.5 知 S/λ_J 是平坦的. 但 S/λ_J 不满足条件(P). 否则，由命题 5.1 知 $|J| = 1$，所以 J 中的唯一元素是幂等元. 而由例 2.7 知 $|E(S)| = 1$，所以 $J = S$，与 J 是真左理想的条件矛盾.

这个例子说明从条件 $|E(S)| = 1$ 不仅推不出所有平坦 S-系满足条件(P)，而且也推不出所有循环平坦 S-系满足条件(P). 所以定理 5.6 的逆不成立.

命题 5.8 设 S 的任意两个右理想有非空的交. 如果任意循环平坦 S-系满足条件(P)，则对于 S 的任意真左理想 J，若 $|J| > 1$，则存在 $j \in J - jJ$.

证明 设 J 是真左理想且 $|J| > 1$. 如果对任意 $j \in J$ 有 $j \in jJ$，则由定理 5.5 知 S/λ_J 是平坦的，从而 S/λ_J 满足条件(P). 所以由命题 5.1 知 $|J| = 1$. 矛盾. //

定理 5.9 设 S 的任意两个右理想有非空的交，则如下几条是等价的：

(1) $S = N$ 或 $S = N \dot{\cup} \{0\}$，其中 N 是左可消幺半群；

(2) S 是右 PP 幺半群且所有循环平坦 S-系满足条件(P)；

(3) S 是右 PP 幺半群且所有循环弱平坦 S-系满足条件(P)；

(4) S 是右 PP 幺半群，且对任意真左理想 J，若 $|J| > 1$，则存在 $j \in J - jJ$；

(5) S 是右 PSF 幺半群且所有循环平坦 S-系满足条件(P)；

(6) S 是右 PSF 幺半群且所有循环弱平坦 S-系满足条件(P)；

(7) S 是右 PSF 幺半群，且对任意真左理想 J，若 $|J| > 1$，则存在 $j \in J - jJ$.

证明 (1)⇒(4) 若 S 是左可消幺半群，则由定理 2.9 知 S 是右 PP 的. 设 J 是 S 的真左理想，且 $|J| > 1$. 对任意 $j \in J$，若 j

$\in jJ$，则存在 $j' \in J$，使得 $j = jj'$. 利用 S 的左可消性即知 $j' = 1$，从而 $J = S$. 矛盾. 所以 $j \in J - jJ$.

设 $S = N \dot{\cup} \{0\}$，其中 N 是左可消幺半群. 显然对任意 $0 \neq x \in S$，有 $xS \simeq S$，所以 S 是右 PP 幺半群. 设 J 是真左理想且 $|J| > 1$. 取 $j \in J$ 但 $j \neq 0$. 若 $j \in jJ$，则存在 $j' \in J$，使得 $j = jj'$. 显然 $j' \neq 0$. 因此 $j' = 1$，从而 $J = S$. 矛盾. 所以 $j \in J - jJ$.

(4)⇒(7)　右 PP 幺半群是右 PSF 幺半群.

(7)⇒(6)　首先证明当(7)成立时，必有 $E(S) = \{1\}$ 或 $E(S) = \{1,0\}$. 设 $1 \neq e \in E(S)$，则 Se 是 S 的真左理想. 因为对任意 $s \in S$ 有 $se = see \in seSe$，所以由(7)知 $|Se| = 1$，故 e 是 S 的右零元，设 I 是 S 的所有右零元构成的集合，则 I 是 S 的左理想. 若 $1 \in I$，则 $S = \{1\}$，从而 $E(S) = \{1\}$. 设 $1 \notin I$，则 I 是真左理想. 显然对任意 $e \in I$ 有 $e \in eI$，所以由(7)知 $|I| = 1$. 这说明 S 含有唯一的右零元，易知唯一的右零元是 S 的零元，所以 $e = 0$. 故 $E(S) = \{1,0\}$.

设 λ 是 S 上的左同余，且 S/λ 是弱平坦 S-系. 要证明 S/λ 满足条件(P). 设 $x, y \in S$，$b, b' \in S/\lambda$，满足 $xb = yb'$. 考虑下述四种情形：

(i) $x \neq 0 \neq y$. 因为 S/λ 是弱平坦的，所以由定理 4.5.5 知存在 $b'' \in S/\lambda$，$x_1, y_1, u, v \in S$，使得

$$x = xu, y = yv, xx_1 = yy_1,$$
$$ub = x_1 b'', vb' = y_1 b''.$$

因为 S 是右 PSF 幺半群，所以由定理 4.4.13 知 x 是左半可消元. 因此由 $x = xu$ 知存在 $z_1 \in S$，使得 $x = xz_1$，$z_1 = z_1 u$. 显然 z_1 也是左半可消元，所以存在 $z_2 \in S$，使得 $z_1 = z_1 z_2$，$z_2 = z_2 u$. 继续上述过程就可得到无穷元素链 $z_1, z_2, \cdots$，满足

$$z_i = z_i z_{i+1}, z_i u = z_i, \quad i = 1, \cdots.$$

作左理想 $J=\bigcup_{i=1}^{\infty}Sz_i$. 对任意 $j\in J$, $j=sz_i$, 其中 $s\in S$. 所以 $j=sz_i=sz_iz_{i+1}\in jJ$. 由条件即知 $|J|=1$ 或 $J=S$. 如果 $|J|=1$, 则 $x=xz_1\in J$ 是 S 的右零元, 所以 $x\in E(S)$, 但 $x\neq 0$, 所以 $x=1$, 从而 $S=J=\{1\}$, 显然任意 S-系满足条件(P). 如果 $J=S$, 则存在正整数 n 和 $t\in S$, 使得 $tz_n=1$, 因此 $z_{n+1}=1z_{n+1}=tz_nz_{n+1}=tz_n=1$, 从而 $u=1$.

类似的方法可以证明 $v=1$, 所以有

$$b=x_1b'', b'=y_1b'', xx_1=yy_1.$$

(ii) $x=y=0$. 设 $b=s\bar{1}$, $b'=t\bar{1}$. 令 $b''=\bar{1}$, $x_1=s$, $y_1=t$, 则 $b=x_1b''$, $b'=y_1b''$, $xx_1=0=yy_1$.

(iii) $x\neq 0$, $y=0$. 此时 $xb=yb'=\bar{0}$. 设 $b=\bar{t}$, 则在 $S\otimes S/\lambda$ 中有 $x\otimes\bar{t}=x\otimes\bar{0}$. 因为 S/λ 是弱平坦的, 所以在 $xS\otimes S/\lambda$ 中有 $x\otimes\bar{t}=x\otimes\bar{0}$. 因此存在 $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$, $\overline{w_1},\cdots,\overline{w_n}\in S/\lambda$, 使得

$$\begin{aligned}
& & \bar{t}&=s_1\overline{w_1},\\
xs_1&=xt_1, & t_1\overline{w_1}&=s_2\overline{w_2},\\
xs_2&=xt_2, & t_2\overline{w_2}&=s_3\overline{w_3},\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
xs_n&=xt_n, & t_n\overline{w_n}&=\bar{0}.
\end{aligned}$$

因为 x 是左半可消元, 所以由 $xs_i=xt_i$ 知存在 $z_1\in S$, 使得 $z_1s_i=z_1t_i$, $x=xz_1$. 利用上面类似的方法可以证明

$$s_1=t_1, s_2=t_2, \cdots, s_n=t_n.$$

因此,

$$\begin{aligned}
b&=\bar{t}=s_1\overline{w_1}=t_1\overline{w_1}=s_2\overline{w_2}=\cdots=s_n\overline{w_n}\\
&=t_n\overline{w_n}=\bar{0}.
\end{aligned}$$

令 $b''=b'$, $x_1=0$, $y_1=1$, 则 $xx_1=0=yy_1$, $b=x_1b''$, $b'=y_1b''$.

(iv) $x = 0, y \neq 0$. 此时的证明和(iii)类似.

因此 S/λ 满足条件(P).

(6)⇒(5)　显然.

(5)⇒(1)　由命题5.8知对任意真左理想 J,若 $|J| > 1$,则存在 $j \in J - jJ$. 类似于(7)⇒(6)的证明可知 $E(S) = \{1\}$ 或 $E(S) = \{1,0\}$. 设 $E(S) = \{1\}$. 对任意 $x,s,t \in S$,若 $xs = xt$,则类似于(7)⇒(6)的证明可得 $s = t$. 所以 S 是左可消的.

设 $E(S) = \{1,0\}$,则0是非左可消元. 设 d 也是非左可消元,则存在 $x,y \in S$,使得 $dx = dy$ 但 $x \neq y$. 因为 S 是右PSF的,所以 d 是左半可消元. 若 $d \neq 0$,则类似于(7)⇒(6)的证明即可得 $x = y$,矛盾. 所以 $d = 0$. 这说明 S 含有唯一的非左可消元0.

令 $N = S - \{0\}$,设 $x,y \in N$ 满足 $xy = 0$,则由 $xy = x0$ 得 $y = 0$,矛盾. 所以 $xy \neq 0$. 这说明 N 是 S 的子半群. 显然 N 是左可消幺半群且 $S = N \dot{\cup} \{0\}$.

(3)⇒(2)　显然.

(2)⇒(4)　由命题5.8即得.

(4)⇒(3)　类似于(7)⇒(6)的证明即可.　//

下面的引理要多次使用,其证明可参看[39].

引理5.10　设 λ 是 S 上的左同余,则 S/λ 是平坦的当且仅当对于 S 上的任意右同余 ρ,任意 $u,v \in S$,若 $u(\lambda \vee \rho)v$,则存在 $s,t \in S$,使得 $us\rho vt$,且 $s(\lambda \vee \rho u)1, t(\lambda \vee \rho v)1$,这里 ρu 是如下定义的右同余:

$$x(\rho u)y \Leftrightarrow ux\rho uy.$$

§6　循环平坦系的强平坦性

本节研究所有循环平坦 S-系是强平坦系的幺半群,给出了这

类幺半群的一个特征刻画. 利用所得结果还研究了所有循环平坦系满足条件(P)的右 PSF 幺半群. 本节的一部分内容选自 Bulman-Fleming 和 Normak 的论文[26].

先从下面的引理开始.

引理6.1 设 S 是幺半群, $w,t\in S$, 令 $\lambda=\lambda(tw,t)$, 则对任意 $x,y\in S$, $x\lambda y$ 的充要条件是存在 $m,n\geqslant 0$, 使得 $xw^m=yw^n$ 且

$$xw^i\in St,\quad 0\leqslant i<m,$$
$$yw^j\in St,\quad 0\leqslant j<n.$$

证明 在 S 上定义关系 θ 如下: $x\theta y$ 当且仅当存在 $m,n\geqslant 0$, 使得 $xw^m=yw^n$, 且 $xw^i\in St(0\leqslant i<m)$, $yw^j\in St(0\leqslant j<n)$. 设 $x\theta y$, $y\theta z$, 则存在 $m,n,l,k\geqslant 0$, 使得 $xw^m=yw^n$, $yw^l=zw^k$, 且 $xw^i,yw^j,zw^p\in St$, $0\leqslant i<m$, $0\leqslant p<k$, $0\leqslant j<\max\{n,l\}$. 设 $n>l$, 则有 $xw^m=yw^n=yw^lw^{n-l}=zw^{k+n-l}$. 当 $0\leqslant j<k$ 时, $zw^j\in St$; 当 $k\leqslant j<k+n-l$ 时, $zw^j=zw^kw^{j-k}=yw^lw^{j-k}=yw^{l+j-k}\in St$. 设 $n<l$, 则可类似于上述证明. 设 $n=l$, 此时 $xw^m=zw^k$. 这就证明了关系 θ 是 S 上的等价关系.

显然 θ 还是 S 上的左同余. 因为 $tw\cdot 1=t\cdot w$, 所以令 $m=0$, $n=1$, 则 $t\cdot w^0=t\in St$. 因此有 $tw\theta t$. 所以 $\lambda\subseteq\theta$.

反过来, 设 $x\theta y$, 则存在 $m,n\geqslant 0$, 使得 $xw^m=yw^n$, 且 $xw^i,yw^j\in St$, $0\leqslant i<m$, $0\leqslant j<n$. 记 $xw^i=u_it$, $yw^j=v_jt$, 其中 $u_i,v_j\in S$, $0\leqslant i<m$, $0\leqslant j<n$, 则有

$$x=u_0t,$$
$$u_0(tw)=xw=u_1t,$$
$$u_1(tw)=xw^2=u_2t,$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_{m-1}(tw)=xw^m=yw^n=v_{n-1}(tw),$$
$$v_{n-1}t=yw^{n-1}=yw^{n-2}w=v_{n-2}(tw),$$
$$\cdots\cdots$$

$$v_2t = yw^2 = yww = v_1(tw),$$

$$v_1t = yw = v_0(tw),$$

$$v_0t = y,$$

所以 $x\lambda y$. 这说明 $\theta \subseteq \lambda$. 因此 $\lambda = \theta$. 结论随之得证. //

引理6.2 设 $e \in E(S)$, ρ 是 S 上的右同余, $w \in S$, $\lambda = \lambda(ew, e)$. 如果存在自然数 $m, n, m < n$, 和 $z \in S$, 使得 $zw^i \rho zw^i e$, $m \leqslant i < n$, 那么, 对任意 $y \in S$, 如果 $y\rho zw^m$, 则 $1(\lambda \vee \rho y)w^{n-m}$, 这里 ρy 的定义为: $u(\rho y)v \Leftrightarrow yu\rho yv$.

证明 因为 $y\rho zw^m \rho zw^m e\rho ye$, 所以有 $1(\rho y)e$. 显然 $ew\lambda e$. 又因为 $yew\rho yw$, 所以 $ew(\rho y)w$. 因此有 $1(\lambda \vee \rho y)w$.

若 $n - m = 1$, 则结论已证毕. 设 $n = m \geqslant 2$. 此时有 $yw\rho zw^{m+1}\rho zw^{m+1}e\rho ywe$, 所以 $w(\rho y)we\lambda wew(\rho y)w^2$. 结合第一段证明的结果即得 $1(\lambda \vee \rho y)w^2$.

若 $n - m = 2$, 则结论已证毕. 若 $n - m > 2$, 则继续使用上述的证明方法即可证明本引理. //

引理6.3 设 λ, ρ 是 S 上的左、右同余, $x, y, z \in S$. 若 $1(\lambda \vee \rho(yx))z$, 则 $x(\lambda \vee \rho y)xz$.

证明 设 $s_0, s_1, \cdots, s_n \in S$, 使得

$$1\lambda s_0(\rho yx)s_1\lambda s_2\cdots s_{n-1}\lambda s_n(\rho yx)z,$$

则 $yxs_0\rho yxs_1, \cdots, yxs_n\rho yxz$. 所以有

$$x\lambda xs_0(\rho y)xs_1\lambda xs_2\cdots xs_{n-1}\lambda xs_n(\rho y)xz,$$

即 $x(\lambda \vee \rho y)xz$. //

下面的命题给出了平坦循环 S- 系的许多例子.

命题6.4 设 S 是幺半群, $w \in S$, $e \in E(S)$, $\lambda = \lambda(ew, e)$, 则 S- 系 S/λ 是平坦的.

证明 设 ρ 是 S 上的任意右同余, $u, v \in S$, 且 $u(\lambda \vee \rho)v$. 要证明存在 $x, y \in S$, 使得 $ux\rho vy$, 且 $x(\lambda \vee \rho u)1$, $y(\lambda \vee \rho v)1$, 从而由引理 5.10 知 S/λ 是平坦的.

令 $\Phi = \lambda \circ \rho$, 则 $\lambda \vee \rho = \bigcup_{n=0}^{\infty}\Phi^n$. 由 $u(\lambda \vee \rho)v$ 知存在 n, 使得

$u\Phi^n v$. 对 $n \geqslant 0$ 用数学归纳法证明存在 $l, r \geqslant 0$，使得 $uw^l \rho vw^r, w^l(\lambda \vee \rho u)1, w^r(\lambda \vee \rho v)1$，且

$$uw^i \rho uw^i e, \quad 0 \leqslant i < l,$$
$$vw^j \rho vw^j e, \quad 0 \leqslant j < r.$$

设 $n = 0$. 此时有 $u = v$. 可取 $l = r = 0$.

设对于 $n \geqslant 0$ 上述结论已成立. 假定 $u\Phi^{n+1}v$，则存在 $x, y \in S$，使得 $u\Phi^n x\lambda y\rho v$. 由归纳假定知存在 $l, r \geqslant 0$，使得 $uw^l \rho xw^r, w^l(\lambda \vee \rho u)1, w^r(\lambda \vee \rho x)1$，且 $uw^i \rho uw^i e, 0 \leqslant i < l, xw^j \rho xw^j e, 0 \leqslant j < r$. 对于 $x\lambda y$，由引理 6.1 知存在 $m, p \geqslant 0$，使得 $xw^m = yw^p$，且 $xw^i, yw^j \in Se, 0 \leqslant i < m, 0 \leqslant j < p$. 考虑下列三种情形：

(a) $r > m$. 此时有

$$uw^l \rho xw^r = xw^m w^{r-m} = yw^p w^{r-m} \rho vw^{r-m+p}.$$

已知当 $0 \leqslant i < l$ 时，$uw^i \rho uw^i e$，且 $w^l(\lambda \vee \rho u)1$. 因为 $v\rho yw^0, yw^i \in Se (0 \leqslant i < p)$（从而 $yw^i = yw^i e$），所以由引理 6.2 知有 $1(\lambda \vee \rho v)w^p$. 又因为 $vw^p \rho yw^p = xw^m$，而 $xw^i \rho xw^i e (m \leqslant i < r)$，所以由引理 6.2 知 $1(\lambda \vee \rho(vw^p))w^{r-m}$. 再由引理 6.3 即知 $w^p(\lambda \vee \rho v)w^{r-m+p}$. 合起来即得结论 $1(\lambda \vee \rho v)w^{r-m+p}$. 另外，当 $0 \leqslant j < p$ 时，已有 $vw^j \rho yw^j \in Se$，从而 $vw^j \rho yw^j = yw^j e \rho vw^j e$. 当 $p \leqslant j < r - m + p$ 时，

$$\begin{aligned} vw^j &= vw^p w^{j-p} \rho yw^p w^{j-p} = xw^m w^{j-p} \\ &= xw^{j+m-p} \rho xw^{j+m-p} e \rho vw^j e. \end{aligned}$$

(b) $r = m$. 此时有

$$uw^l \rho xw^r = xw^m = yw^p \rho vw^p,$$

$1(\lambda \vee \rho u)w^l, uw^i \rho uw^i e (0 \leqslant i < l)$；又 $w^p(\lambda \vee \rho u)1$（同(a)的证明）. 对任意 $0 \leqslant j < p, vw^j \rho yw^j = yw^j e \rho vw^j e$.

(c) $r < m$. 此时有

$$uw^{l+m-r} = uw^l w^{m-r} \rho xw^r w^{m-r} = xw^m = yw^p \rho vw^p.$$

由上面的证明可知有 $1(\lambda \vee \rho v)w^p, vw^i \rho vw^i e (0 \leqslant i < p)$. 因为 $u\rho uw^0, uw^i \rho uw^i e (0 \leqslant i < l)$，所以由引理 6.2 知有 $1(\lambda \vee \rho u)w^l$. 又因为 $uw^l \rho xw^r, xw^i = xw^i e (r \leqslant i < m)$，所以由引理 6.2 知有 $1(\lambda$

$\vee\ \rho(uw^l))w^{m-r}$，再由引理 6.3 知 $w^l(\lambda \vee \rho u)w^{m-r+l}$. 所以 $1(\lambda \vee \rho\ u)w^{m-r+l}$. 另外，若 $0 \leqslant j < l$，则 $uw^j\rho uw^je$；若 $l \leqslant j < m-r+l$，则 $0 \leqslant j-l+r < m$，所以 $uw^j = uw^lw^{j-l}\rho xw^rw^{j-l} = xw^{j-l+r} = xw^{j-l+r}e\rho uw^je$.

这就证明了 S/λ 是平坦 S- 系. //

推论 6.5 设 $w \in S$，t 是 S 的正则元，$\lambda = \lambda(tw,t)$，则 S/λ 是平坦系.

证明 设 $t = tt't$，令 $e = t't \in E(S)$. 对任意左同余 θ，有

$$tw\theta t \Leftrightarrow ew\theta e,$$

所以 $\lambda(tw,t) = \lambda(ew,e)$. 由命题 6.4 即得结论. //

推论 6.6 设所有平坦循环 S- 系满足条件(P)，则任意 $e \in E(S) - \{1\}$ 都是 S 的左零元.

证明 设 $e \in E(S)$，$e \neq 1$，$x \in S$. 由命题 6.4 知循环 S- 系 $S/\lambda(exe,e)$ 是平坦的，所以满足条件(P). 因为 $exe\lambda(exe,e)e$，所以由命题 1.1 知存在 $s,t \in S$，使得 $exes = et$，且 $s\lambda(exe,e)1\lambda(exe,e)t$.

设 $s \neq 1$，则存在 $t_1,\cdots,t_n \in S$，使得

$$1 = t_1c_1, t_1d_1 = t_2c_2, \cdots, t_nd_n = s,$$

这里 $\{c_i,d_i\} = \{exe,e\}$，$i = 1,\cdots,n$. 所以 $1 \in Se$ 从而 $e = 1$. 矛盾. 因此 $s = 1$. 同理可证 $t = 1$. 所以有 $exe = e$.

设 $e,f \in E(S) - \{1\}$. 由命题 6.4 知循环 S- 系 $S/\lambda(fe,f)$ 是平坦的，从而满足条件(P). 因为 $fe\lambda(fe,f)f$，所以由命题 1.1 知存在 $u,v \in S$，使得 $feu = fv$，且 $u\lambda(fe,f)1$，$v\lambda(fe,f)1$. 同上述方法类似地可证得若 $u \neq 1$，则必有 $1 \in Sf$ 或者 $1 \in Se$，即 $f = 1$ 或者 $e = 1$. 矛盾. 因此 $u = 1$. 同理可证 $v = 1$. 所以 $fe = f$.

设 $e \in E(S) - \{1\}$，$x \in S$，则 $ex = exex$，即 $ex \in E(S)$. 又显然 $ex \neq 1$. 由已证的结论知有 $exe = ex \cdot e = ex$. 又 $exe = e$，所以 $ex = e$. 因此 e 是 S 的左零元. //

引理 6.7 设 λ 是 S 上的左同余，S/λ 是弱平坦 S- 系，e,f 是 S 的左零元且 $e\lambda f$，则 $e = f$.

证明 因为 $e\lambda f$，所以由命题 2.11 知存在 $s,t \in S$，使得 $es =$

ft，且 $s(\lambda \vee \Delta e)1(\lambda \vee \Delta f)t$. 由于 e,f 是左零元，所以 $e = f$. //

下面是本节的主要结果.

定理 6.8 对于幺半群 S，以下几条是等价的：

(1) 任意弱平坦循环左 S- 系是投射的；

(2) 任意弱平坦循环左 S- 系是强平坦的；

(3) 任意平坦循环左 S- 系是投射的；

(4) 任意平坦循环左 S- 系是强平坦的；

(5) 任意 $x \in S, x \neq 1$，存在自然数 n，使得 x^n 是 S 的左零元.

此时称 S 为左谐零幺半群.

证明 (1)⇒(3)⇒(4) 和(1)⇒(2)⇒(4) 都是显然的.

(4)⇒(5) 由推论 6.6 知任意 $e \in E(S) - \{1\}$ 都是 S 的左零元. 对于任意 $x \in S$，由定理 1.5 知存在自然数 n，使得 $x^{n+1} = x^n$. 所以 $x^n \in E(S)$. 若 $x^n = 1$，则 x 是可逆元，所以由 $x^{n+1} = x^n$ 即得 $x = 1$. 因此，若 $x \neq 1$，则存在自然数 n，使得 x^n 是 S 的左零元.

(5)⇒(2) 设 λ 是 S 上的左同余，S/λ 是弱平坦 S- 系. 要证明 S/λ 是强平坦的. 设 $u,v \in S$ 满足 $u\lambda v$. 由命题 2.11 知存在 $s,t \in S$，使得 $us = vt, s(\lambda \vee \Delta u)1, t(\lambda \vee \Delta v)1$. 令 $\Phi = \lambda \circ \Delta u, \Psi = \lambda \circ \Delta v$. 设 $m,n \geqslant 0$ 是满足 $s\Phi^m 1$ 和 $t\Psi^n 1$ 的最小的非负整数. 考虑以下几种情形(要证明存在 $w \in S$，使得 $uw = vw$，且 $w\lambda 1$)：

(a) $m = 1$. 此时有 $s = 1$，因此 $u = vt$. 如果 $n = 0$，那么 $t = 1$，从而令 $w = 1$ 即有 $uw = vw$ 且 $w\lambda 1$. 设 $n > 0$，则存在 $x,y \in S$，使得 $t\Psi^{n-1}x\lambda y(\Delta v)1$. 若 $y \neq 1$，则 $vy = v$，而 $y \in S$，所以存在 l，使得 y^l 是 S 的左零元. 显然 $v = vy^l$，所以 v 也是 S 的左零元. 故有 $u = vt = v$. 令 $w = 1$ 即可. 设 $y = 1$，则由 n 的最小性可知 $x \neq 1$，所以存在 l，使得 x^l 是 S 的左零元，由 $x\lambda y = 1$ 易得 $x^l\lambda 1$，故 $ux^l\lambda u\lambda v\lambda vx^l$. 而 ux^l, vx^l 都是 S 的左零元，所以由引理 6.7 知 $ux^l = vx^l$. 令 $w = x^l$ 即可.

(b) $n = 0$. 类似于情形(a) 即可完成证明.

(c) $m > 0, n > 0$. 此时存在 $x,y,z,r \in S$，使得

$$s\Phi^{m-1}x\lambda y(\Delta u)1,$$

$$t\Psi^{n-1}z\lambda r(\Delta v)1.$$

易知 $u = uy, v = vr$. 如果 $y \neq 1, r \neq 1$, 则存在 k, l, 使得 y^k, r^l 是 S 的左零元, 所以 $u = uy^k, v = vr^l$ 也是 S 的左零元, 故从 $us = vt$ 即得 $u = v$. 令 $w = 1$ 即可. 设 $y = 1$, 则由 m 的最小性知 $x \neq 1$. 所以存在 k, 使得 x^k 是左零元. 由于 $ux^k\lambda u, vx^k\lambda v, u\lambda v$, 所以 $ux^k\lambda vx^k$. 又 ux^k, vx^k 都是左零元, 所以 $ux^k = vx^k$. 令 $w = x^k$, 则 $w\lambda 1, uw = vw$. 如果 $r = 1$, 则类似的证明即得结论.

所以由命题 1.2 知 S- 系 S/λ 是强平坦的.

(2)⇒(1)　设 $\lambda = \Delta$, 则 $S/\lambda \simeq S$ 是投射 S- 系. 设 S/λ 是弱平坦的, 且 $\lambda \neq \Delta$. 由条件知 S/λ 是强平坦的. 设 $u, v \in S, u \neq v$ 但 $u\lambda v$. 由 S/λ 的强平坦性知存在 $s \in S$, 使得 $us = vs$, 且 $s\lambda 1$. 显然 $s \neq 1$. 由(2)⇒(4)⇒(5) 知存在 k, 使得 s^k 是 S 的左零元. 显然 $us^k = vs^k, s^k\lambda 1$. 对于不同的 $u, v \in S, u \neq v, u\lambda v$, 可以得到不同的 s^k, 但这些 s^k 都在 1 所在的 λ- 类中, 从而由引理 6.7 知这些 s^k 都是相等的. 令 $e = s^k$, 则 $ue = ve$, 且 $e\lambda 1$. 令 $f: S/\lambda \to Se$ 如下:

$$f(s\lambda) = se, \qquad \forall\, s \in S.$$

若 $u\lambda v$, 而 $u \neq v$, 则由上面的讨论知 $ue = ve$, 即 $f(u\lambda) = f(v\lambda)$. 这说明 f 是有定义的. 显然 f 是 S- 同态. 若 $ue = ve$, 则 $u\lambda ue = ve\lambda v$. 所以 f 还是同构. 因此 $S/\lambda \simeq Se$ 是投射的. //

定理 6.9　设幺半群 S 的任意两个主右理想有非空的交, 则如下两条是等价的:

(1) 所有循环平坦 S- 系是强平坦的;

(2) $S = \{1\}$, 或 $S = N^1$, 这里 N 是诣零半群.

证明　(1)⇒(2)　设所有循环平坦 S- 系是强平坦的, 则由定理 6.8 知对于任意 $x \in S, x \neq 1$, 存在 n 使得 x^n 是 S 的左零元. 设 $S \neq \{1\}$, 则 S 中肯定有一个左零元 e. 设 $x \in S - \{1\}$, 则有 $\{x^n\} = x^nS$. 又 $\{e\} = eS$, 而 $x^nS \cap eS \neq \varnothing$, 所以 $x^n = e$, 从而 $xe = xx^n = x^nx = x^n = e$, 即 e 是 S 中的零元. 所以 $S = N^1$, N 是诣零半群.

(2)⇒(1)　由定理 6.8 即得结论. //

利用本节前面得到的结论, 很容易证明下述定理中的

(1)⇒(6)(设 S 是右 PP 幺半群且所有循环平坦 S- 系满足条件(P)，$x \in S$，则存在 $e \in E(S)$，使得 $xe = x$，且对任意 $s,t \in S$，若 $xs = xt$，则 $es = et$. 如果 $e = 1$，则 x 是左可消元. 如果 $e \neq 1$，则由推论 6.6 知 e 是 S 的左零元，所以 $x = xe$ 也是 S 的左零元). 这里使用另外的方法可证明得更多一些. 下述定理是对定理 5.9 的推广，其证明方法部分来自于[26]，部分来自于[120].

定理 6.10 对于幺半群 S，以下几条是等价的：

(1) S 是右 PP 的，且任意循环平坦 S- 系满足条件(P)；

(2) S 是右 PP 的，且任意循环弱平坦 S- 系满足条件(P)；

(3) S 是右 PSF 的，且任意循环平坦 S- 系满足条件(P)；

(4) S 是右 PSF 的，且任意循环弱平坦 S- 系满足条件(P)；

(5) S 中的所有元都是左半可消元，且对于 S 的任意真左理想 I，或存在 $a \in I - aI$，或 I 中的所有元皆为左零元；

(6) 任意 $x \in S$，x 是左零元或左可消元.

证明 (2)⇒(1)⇒(3) 和(2)⇒(4)⇒(3) 都是显然的.

(3)⇒(6) 设 $x \in S$，x 不是左可消元，则存在 $c,d \in S$，使得 $xc = xd$ 但 $c \neq d$. 因为 S 是右 PSF 幺半群，所以由定理 4.4.13 知 x 是 S 的左半可消元. 因此存在 $x_1 \in S$，使得 $x_1c = x_1d, x = xx_1$. x_1 也是左半可消元，所以由 $x_1c = x_1d$ 知存在 $x_2 \in S$，使得 $x_2c = x_2d, x_1 = x_1x_2$. 继续上述过程可知存在 $x_1, x_2, \cdots \in S$，使得

$$x_ic = x_id, x_i = x_ix_{i+1}, \quad i = 1,2,\cdots.$$

利用数学归纳法容易证明

$$xx_i = x, \quad i = 1,2,\cdots.$$

令

$$H = \{(x_ix, x_i) \mid i = 1,2,\cdots\}.$$

记 $\lambda = \lambda(H)$ 为由 H 生成的 S 的最小左同余. 下面证明左 S- 系 S/λ 是平坦的.

设 ρ 是 S 的任意右同余，$u,v \in S$，且 $u(\lambda \vee \rho)v$. 只需找到 $s, t \in S$，使得 $us\rho vt$，$s(\lambda \vee \rho u)1$，$t(\lambda \vee \rho v)1$ 即可.

若 $u = v$，则取 $s = t = 1$ 即可. 设 $u \neq v$，则存在 u_0, v_0, u_1, v_1，

$\cdots,u_n,v_n\in S$,使得

$$u=u_0\lambda v_0\rho u_1\lambda v_1\cdots\rho u_n\lambda v_n\rho u_{n+1}=v.$$

如果 $u_0=v_0,u_1=v_1,\cdots,u_n=v_n$,则 $u\rho v$,所以取 $s=t=1$ 即可.设 j 和 k 满足 $u_0=v_0,\cdots,u_{j-1}=v_{j-1}$,但 $u_j\neq v_j,u_k\neq v_k,u_{k+1}=v_{k+1},\cdots,u_n=v_n$,则有

$$u=u_0=v_0\rho u_1=v_1\rho\cdots\rho u_{j-1}=v_{j-1}\rho u_j,$$

$$v_k\rho u_{k+1}=v_{k+1}\rho\cdots\rho u_n=v_n\rho u_{n+1}=v.$$

对于任意 $i\in\{j,\cdots,k\}$,若 $u_i\neq v_i$,则存在 $t_{i1},\cdots,t_{im_i}\in S$,使得

$$u_i=t_{i1}c_{i1},t_{i1}d_{i1}=t_{i2}c_{i2},\cdots,t_{im_i}d_{im_i}=v_i,$$

其中$(c_{i1},d_{i1}),\cdots,(c_{im_i},d_{im_i})\in H\cup H^{-1}$.设$\{c_{i1},d_{i1}\}=\{x_{p_i}x,x_{p_i}\}$,$\{c_{im_i},d_{im_i}\}=\{x_{q_i}x,x_{q_i}\}$.记$r_i=\max\{p_i,q_i\}$.若 $c_{i1}=x_{p_i}x$,则 $u_ix_{r_i+1}=t_{i1}c_{i1}x_{r_i+1}=t_{i1}x_{p_i}(xx_{r_i+1})=t_{i1}x_{p_i}x=t_{i1}c_{i1}=u_i$.若 $c_{i1}=x_{p_i}$,则 $u_ix_{r_i+1}=t_{i1}c_{i1}x_{r_i+1}=t_{i1}x_{p_i}x_{r_i+1}=t_{i1}x_{p_i}=t_{i1}c_{i1}=u_i$.总之有 $u_ix_{r_i+1}=u_i$.同理 $v_ix_{r_i+1}=v_i$.令 $r=\max\{r_i+1\mid j\leqslant i\leqslant k,u_i\neq v_i\}$,则容易证明对任意 $u_i\neq v_i$,有

$$u_ix_r=u_i,\quad v_ix_r=v_i.$$

继续设 $u_i\neq v_i,i\in\{j,\cdots,k\}$.同上记号,若 $c_{i1}=x_{p_i}x$,则 $u_ix=t_{i1}c_{i1}x=t_{i1}x_{p_i}xx=t_{i1}x_{p_i}x^2=t_{i1}d_{i1}x^2=t_{i2}c_{i2}x^2$.若 $c_{i1}=x_{p_i}$,则 $u_ix^2=t_{i1}c_{i1}x^2=t_{i1}x_{p_i}x^2=t_{i1}d_{i1}x=t_{i2}c_{i2}x$.用数学归纳法容易证明存在自然数$\alpha_i,\beta_i$,使得$u_ix^{\alpha_i}=v_ix^{\beta_i}$.显然若 $u_i=v_i$,则上述 α_i,β_i 仍存在.令 $\alpha=\sum_{i=j}^{k}\alpha_i,\beta=\sum_{i=j}^{k}\beta_i$,则有

$$\begin{aligned}ux_rx^\alpha\rho u_jx_rx^\alpha&=u_jx^\alpha=u_jx^{\alpha_j}x^{\alpha-\alpha_j}\\&=v_jx^{\beta_j}x^{\alpha-\alpha_j}=\cdots=v_kx^\beta\\&=v_kx_rx^\beta\rho vx_rx^\beta.\end{aligned}$$

所以若令 $s=x_rx^\alpha,t=x_rx^\beta$,则 $us\rho vt$.又因为 $x_r\lambda x_rx$,所以 $x_rx^2=x_rxx=x_r(xx_r)x=(x_rx)(x_rx)\lambda x_rxx_r=x_rx\lambda x_r$.类似地可以证明 $x_rx^\alpha\lambda x_r$,即 $s\lambda x_r$.而 $ux_r\rho u_jx_r=u_j\rho u$,所以 $x_r(\rho u)1$,从而 $s(\lambda\vee\rho u)1$.同理可证 $t(\lambda\vee\rho v)1$.因此 S/λ 是平坦的.

由条件即知 S/λ 满足条件(P). 所以由命题 1.1 知存在 $s,t\in S$, 使得 $x_1xs=x_1t$, 且 $s\lambda 1\lambda t$. 设 $s\neq 1$. 由于 $s\lambda 1$, 所以存在 $t_1,\cdots,t_n\in S$, 使得

$$s=t_1c_1, t_1d_1=t_2c_2,\cdots,t_nd_n=1,$$

其中 $(c_i,d_i)\in H\cup H^{-1}, i=1,\cdots,n$. 若 $d_n=x_ix$, 则 $x_{i+1}=1\cdot x_{i+1}=t_nd_nx_{i+1}=t_nx_ixx_{i+1}=t_nx_ix=t_nd_n=1$, 所以 $c=d$, 矛盾. 若 $d_n=x_i$, 则 $x_{i+1}=t_nd_nx_{i+1}=t_nx_ix_{i+1}=t_nx_i=t_nd_n=1$, 又得到 $c=d$, 矛盾. 因此 $s=1$. 同理可证 $t=1$. 所以有 $x_1x=x_1$. 因此,

$$x=xx_1=xx_1x,$$

即 x 是正则元, 所以 x_1x 是幂等元. 若 $x_1x=1$, 则由 $xc=xd$ 即得 $c=d$, 矛盾. 所以 $x_1x\neq 1$. 由推论 6.6 知 x_1x 是 S 的左零元, 所以 $x=xx_1x$ 是左零元.

(6)⇒(5) 设 $u,s,t\in S$ 满足 $us=ut$. 若 u 是 S 的左可消元, 则 $s=t$. 若 u 是 S 的左零元, 则 $us=ut, uu=u$. 所以 u 是 S 的左半可消元.

设 I 是 S 的任意真左理想. 若 $a\in I$ 不是 S 的左零元, 则 a 必是 S 的左可消元. 如果 $a\in aI$, 那么 $1\in I$, 矛盾. 所以 $a\in I-aI$.

(5)⇒(4) 因为 S 中的所有元都是左半可消元, 所以由定理 4.4.13 知 S 是右 PSF 幺半群. 设 λ 是 S 上的左同余, S/λ 是弱平坦 S-系, $b,b'\in S/\lambda, x,y\in S$, 满足 $xb=yb'$. 要找 $s,t\in S, b''\in S/\lambda$, 使得 $xs=yt$, 且 $b=sb'', b'=tb''$.

因为 S/λ 是弱平坦的, 所以由定理 4.5.5 知存在 $x_1,y_1,u,v\in S, b_1''\in S/\lambda$, 使得

$$x=xu,\qquad ub=x_1b_1'',$$
$$y=yv,\qquad vb'=y_1b_1'',$$
$$xx_1=yy_1.$$

考虑如下四种情形:

(i) x,y 都是左零元. 设 $b=s_1\overline{1}, b'=t_1\overline{1}$. 令 $b''=\overline{1}, s=s_1, t=t_1$, 则 $xs=x=xx_1=yy_1=y=yt$, 且 $b=sb'', b'=tb''$.

(ii) x 不是左零元, y 是左零元. 此时由 $xx_1=yy_1$ 得 $y=xx_1$.

在张量积 $S\otimes S/\lambda$ 中，$x\otimes b=1\otimes xb=1\otimes yb'=y\otimes b'=xx_1\otimes b'=x\otimes x_1b'$. 由于 S/λ 是弱平坦的，所以在 $xS\otimes S/\lambda$ 中有 $x\otimes b=x\otimes x_1b'$. 故存在 $b_1,\cdots,b_n\in S/\lambda,s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$，使得

$$
\begin{aligned}
& & b &= s_1b_1,\\
xs_1 &= xt_1, & t_1b_1 &= s_2b_2,\\
xs_2 &= xt_2, & t_2b_2 &= s_3b_3,\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
xs_n &= xt_n, & t_nb_n &= x_1b'.
\end{aligned}
$$

因为 x 是左半可消元，所以由 $xs_1=xt_1$ 知存在 $r_1\in S$，使得 $r_1s_1=r_1t_1,xr_1=x$. 因此 $xr_1s_2=xr_1t_2$. 再利用 x 的左半可消性得知存在 $r_2\in S$，使得 $r_2r_1s_2=r_2r_1t_2,xr_2=x$. 所以 $r_2r_1s_1=r_2r_1t_1,r_2r_1s_2=r_2r_1t_2,xr_2r_1=xr_1=x$. 类似的讨论可以证明存在 $u_1\in S$，使得

$$x=xu_1,u_1s_i=u_1t_i,\quad i=1,\cdots,n.$$

因为 u_1 也是左半可消元，所以同上类似的证明可知存在 $u_2\in S$，使得 $u_1u_2=u_1,u_2s_i=u_2t_i,i=1,\cdots,n$. 继续上述过程可知存在 S 中的元素 $u_1,u_2,\cdots$，使得

$$u_ju_{j+1}=u_j,u_js_i=u_jt_i,\quad 1\leqslant i\leqslant n,j=1,\cdots.$$

令 $I=\bigcup_{j=1}^{\infty}Su_j$，则 I 是 S 的左理想. 对任意 $a\in I$，存在 $y'\in S$，使得 $a=y'u_j$. 所以 $a=y'u_j=y'u_ju_{j+1}=au_{j+1}$. 因此由条件(5)知 I 中的元素皆为左零元，或 $I=S$. 若是前者，则 $u_1\in I$ 是左零元，所以 $x=xu_1$ 也是左零元，和 x 不是左零元的假设条件矛盾. 因此必有 $I=S$. 故存在 j 和 $z\in S$，使得 $1=zu_j$，从而有

$$u_{j+1}=1\cdot u_{j+1}=zu_ju_{j+1}=zu_j=1.$$

故有

$$s_i=t_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

所以

$$b=s_1b_1=t_1b_1=s_2b_2=\cdots=s_nb_n=t_nb_n=x_1b'.$$

令 $b''=b',s=x_1,t=1$，则 $b=sb'',b'=tb'',xs=xx_1=y=yt$.

(iii) x 是左零元，y 不是左零元. 类似于(ii).

(iv) x,y 都不是左零元. S 中没有左零元时也属于此种情形.

因为 x 是左半可消元,所以由 $xu = x$ 知存在 $x_1 \in S$,使得 $x_1u = x, xx_1 = x$. 同理存在 $x_2 \in S$,使得 $x_2u = x_2, x_1x_2 = x_1$. 继续下去可找到 $x_1, x_2, \cdots \in S$,使得

$$x_iu = x_i, x_ix_{i+1} = x_i, \quad i = 1, \cdots,$$

类似于上面的证明即可知 $u = 1$. 同理可证 $v = 1$. 所以 $b = x_1b_1''$, $b' = y_1b_1'', xx_1 = yy_1$.

这即证明了 S/λ 满足条件(P).

(4)⇒(2) 设 S 是右 PSF 的,且任意循环弱平坦 S- 系满足条件(P),则由(4)⇒(3)⇒(6) 可知 S 中的任意元 x 是左零元或左可消元. 由此即知 S 是右 PP 幺半群. //

容易看出,定理 5.9 是定理 6.10 的直接推论. 除此以外还有

推论 6.11 对于幺群 S,以下三条是等价的:

(1) 任意 $x \in S$,若 $x \neq 1$,则 x 是 S 的左零元(即 $S = N^1$,其中 N 是左零半群);

(2) S 是右 PSF(或右 PP) 的,且任意循环平坦左 S- 系是强平坦的;

(3) S 是右 PSF(或右 PP) 的,且任意循环弱平坦左 S- 系是强平坦的.

证明 由定理 1.5 知任意循环的满足条件(P) 的 S- 系是强平坦的当且仅当对任意 $x \in S$,存在自然数 n,使得 $x^{n+1} = x^n$. 所以由定理 6.10 即得本推论. //

定义 6.12 设 S 是幺半群,$x \in S$,称 x 是 S 中的链元,如果存在 $x_1, x_2, \cdots \in S$,使得

$$xx_1 = x, x_ix_{i+1} = x_i, x_i \neq 1, i = 1, 2, \cdots.$$

设 $e \in E(S) - \{1\}$,则显然 e 是 S 的链元,反之,链元可以不是幂等元. 例如,设

$$S = \langle x_0, x_1, x_2, \cdots, | x_ix_{i+1} = x_{i+1}x_i = x_i, i = 0, 1, \cdots \rangle \cup \{1\},$$

则 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 都是 S 中的链元,但 $E(S) = \{1\}$. 所以链元是幂等元的真推广.

下面的推论是对推论 6.6 的推广.

推论 6.13 设任意循环平坦 S- 系满足条件(P),则 S 中的链元皆为 S 的左零元.

证明 由定理 6.10 的证明即得. //

考虑如下三个条件:

(1) 所有循环平坦 S- 系满足条件(P);

(2) S 的所有链元都是左零元;

(3) S 的所有不等于 1 的幂等元是左零元,

则有 (1) ⇒ (2) ⇒(3). 但其逆都不成立. 可见以下两例:

例 6.14 令 $S = \langle x_0, x_1, x_2, \cdots \mid x_{i+1}x_i = x_i = x_ix_{i+1}, i = 0, 1, \cdots \rangle \cup \{1\}$,则 S 满足条件(3). 因为 $x_1x_0 \neq x_1$,所以 x_1 不是左零元. 但 x_1 是链元,所以 S 不满足(2).

例 6.15 令 $S = \langle x, y \mid xy = x^2 = yx \rangle \cup \{1\}, \lambda = \lambda(x, x^2) \vee \lambda(1, y^2)$,则由例 2.12 知 S/λ 是平坦 S- 系,但不满足条件(P). 容易证明对于 $a, b \in S, a = ab \Leftrightarrow b = 1$. 所以 S 中没有链元.

由定理 2.9 知若 S 是右 PP 幺半群,则任意平坦 S- 系满足条件(P) 当且仅当 S 是左可消幺半群. 由定理 6.10 又知若 S 是右 PP(或右 PSF) 幺半群,则任意平坦循环 S- 系满足条件(P) 当且仅当任意 $x \in S, x$ 是左零元或左可消元. 下面给出一个例子说明定理 2.9 和定理 6.10 中的条件"S 是右 PP 幺半群或右 PSF 幺半群"不能去掉. 这个例子同时也说明,离完全刻画所有平坦系满足条件(P)(或所有平坦循环系满足条件(P)) 的幺半群还很远.

例 6.16 设 $S = \langle x, y \mid xy = x^2, yx = y^2 \rangle \cup \{1\}$,则显然有 $x^m y^n = x^{m+n}, y^n x^m = y^{n+m}$. 容易看出 $E(S) = \{1\}$,且 S 中的任意元素 a,若 $a \neq 1$,则 a 不是左可消元. 所以 S 不是右 PP 幺半群,下面将要证明任意弱平坦 S- 系都满足条件(P),所以由定理 6.10 可知 S 也不是右 PSF 幺半群. 注意到 S 是右可消幺半群.

设 A 是弱平坦 S- 系,将证明 A 满足条件(P). 设 $a, a' \in A, s, t \in S$ 满足 $sa = ta'$. 下证存在 $u, v \in S, a'' \in A$,使得 $su = tv, a = ua'', a' = va''$. 若 $s = 1$,则令 $u = t, v = 1, a'' = a'$ 即可. 若 $t = 1$,

则令 $u=1, v=s, a''=a$ 即可. 设 $s\in\langle x\rangle, t\in\langle y\rangle$, 则有 $xa_1=ya_1'$, 这里 $a_1, a_1'\in A$. 因此在 $S\otimes A$ 中有 $x\otimes a_1=y\otimes a_1'$. 由于 A 是弱平坦的, 所以在 $(xS\cup yS)\otimes S$ 中也有 $x\otimes a_1=y\otimes a_1'$. 故存在 $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n\in S, b_1, \cdots, b_n\in A$, 使得

$$
\begin{aligned}
& & a_1 &= s_1b_1, \\
xs_1 &= z_2t_1, & t_1b_1 &= s_2b_2, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
z_ns_n &= yt_n, & t_nb_n &= a_1',
\end{aligned}
$$

其中 $z_i\in\{x,y\}, i=2,\cdots,n$. 所以存在 i, 使得 $z_i=x$, $z_{i+1}=y$, 因此 $z_is_i=z_{i+1}t_i\in xS\cap yS$. 这与 $xS\cap yS=\varnothing$ 矛盾. 同理, 若 $s\in\langle y\rangle, t\in\langle x\rangle$, 则同样得出矛盾. 所以有 $s, t\in\langle x\rangle$, 或者 $s, t\in\langle y\rangle$.

不失一般性, 设 $s, t\in\langle x\rangle$, 则有 $x^ka=x^la'$. 不妨假定 $1\leqslant k\leqslant l$. 所以在 $S\otimes A$ 中有 $x^k\otimes a=x^l\otimes a'$. 由于 A 是弱平坦的, 所以在 $x^kS\otimes A$ 中有 $x^k\otimes a=x^l\otimes a'$. 故存在 $a_i\in A, s_i, t_i\in S, k_i\geqslant k$, 使得

$$
\begin{aligned}
& & a &= x_1^{p_1}a_1, \\
x^kx_1^{p_1} &= x^{k_2}x_2^{m_2}, & x_2^{m_2}a_1 &= x_3^{p_2}a_2, \\
x^{k_2}x_3^{p_2} &= x^{k_3}t_2, & t_2a_2 &= s_3a_3, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
x^{k_n}s_n &= x^lt_n & t_na_n &= a',
\end{aligned}
$$

这里 $p_i, m_i\geqslant 0, x_1, x_2, x_3\in\{x,y\}$. 若 $n=1$, 则结论成立. 设 $n>1$. 因为 $x_2^{m_2}a_1=x_3^{p_2}a_2$, 所以和前一段的证明类似地可知 $x_2=x_3$.

设 $p_1=0$, 则由 $x^kx_1^{p_1}=x^{k_2}x_2^{m_2}$ 以及 $k_2\geqslant k$ 知 $m_2=0$. 所以前述等式组的长度可以减小, 从而可以利用归纳假定. 因此可设 $p_1>0$. 设 $m_2=0$, 则有

$$
\begin{aligned}
& & a &= x_1^{p_1}x_3^{p_2}a_2, \\
x^kx_1^{p_1}x_3^{p_2} &= x^{k_3}t_2, & t_2a_2 &= s_3a_3,
\end{aligned}
$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$x^{k_n}s_n = x^l t_n, \qquad t_n a_n = a'.$$

所以等式组的长度也可减小. 若 $p_2 = 0$,则有相同的结论. 所以可设 $m_2, p_2 > 0$.

设 $x_2 = x_3 = x$,则有 $x^{m_2}a_1 = x^{p_2}a_2$. 由此可以得出 $y^{m_2}a_1 = y^{p_2}a_2$. 事实上,由 $x^{m_2}a_1 = x^{p_2}a_2$ 及 A 的弱平坦性可知存在 $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S, q_2, \cdots, q_n \geqslant \min\{m_2, p_2\}$,使得

$$a_1 = s_1 c_1,$$
$$x^{m_2}s_1 = x^{q_2}t_1, \qquad t_1 c_1 = s_2 c_2,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$x^{q_n}s_n = x^{p_2}t_n, \qquad t_n c_n = a_2,$$

其中 $c_1, \cdots, c_n \in A$. 由此容易得到 $y^{m_2}s_1 = y^{q_2}t_1, \cdots, y^{q_n}s_n = y^{p_2}t_n$. 所以在 $S \otimes A$ 中有 $y^{m_2} \otimes a_1 = y^{p_2} \otimes a_2$,因此 $y^{m_2}a_1 = y^{p_2}a_2$. 同理若 $x_2 = x_3 = y$,则有 $y^{m_2}a_1 = y^{p_2}a_2$,从而 $x^{m_2}a_1 = x^{p_2}a_2$.

因此从 $x_2^{m_2}a_1 = x_2^{p_2}a_2$ 可得 $x_1^{m_2}a_1 = x_1^{p_2}a_2$. 又 $x_1^k x_1^{p_1} = x_1^{k_2}x_1^{m_2}$(因为 $k + p_1 = k_2 + m_2$),所以有

$$a = x_1^{p_1}a_1 = x_1^{k_2+m_2-k}a_1 = x_1^{k_2-k}x_1^{m_2}a_1$$
$$= x_1^{k_2-k}x_1^{p_2}a_2 = x_1^{p_2+k_2-k}a_2,$$
$$x^k x_1^{p_2+k_2-k} = x^{p_2+k_2} = x^{k_2}x_3^{p_2} = x^{k_3}t_2.$$

因此有

$$a = x_1^{p_2+k_2-k}a_2,$$
$$x^k x_1^{p_2+k_2-k} = x^{k_3}t_2, \qquad t_2 a_2 = s_3 t_3,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$x^{k_n}s_n = x^l t_n, \qquad t_n a_n = a'.$$

即等式组的长度又可减小,所以由数学归纳法即可完成证明.

§7 周期幺半群

如何给出所有循环平坦 S- 系都满足条件(P) 的幺半群的“元

素——理想"刻画，至今仍是一个未解决的问题. 前两节给出了上述问题的部分答案，例如当 S 是右 PP 或右 PSF 幺半群时. 本节对于周期幺半群 S，给出上述问题的答案.

半群 S 称为周期半群，如果 S 中的元素具有有限阶，即任意 $a \in S$，$\langle a \rangle$ 是 S 的有限子半群，有限半群显然是周期半群.

定理 7.1 设 S 是周期幺半群，则以下条件是等价的：

(1) 所有循环平坦 S- 系满足条件(P)；

(2) 所有循环弱平坦 S- 系满足条件(P)；

(3) $S = G \dot{\cup} N$，这里 G 是群，$N = \varnothing$，或 N 中的任意元素都是 S 中的左谐零元.

证明 (1)⇒(3) 设 $1 \neq x \in S$，假定对任意自然数 n，$x^n \neq 1$. 因为 S 是周期的，所以 $\langle x \rangle$ 中有幂等元，设其为 x^k. 又 $x^k \neq 1$，所以由推论 6.6 知 x^k 是 S 的左零元.

设

$$G = \{x \in S \mid \text{存在自然数 } n\text{，使得 } x^n = 1\}.$$

对任意 $x, y \in G$，下证 $xy \in G$. 若不然，则由前面的证明可知存在 k，使得 $(xy)^k$ 是 S 的左零元. 显然 $x \neq 1, y \neq 1$. 所以存在 $n > 1, m > 1$，使得 $x^n = 1, y^m = 1$. 为了方便，记 $(xy)^0 = 1$，则有

$$\begin{aligned}(xy)^{k-1} &= 1 \cdot (xy)^{k-1} = y^{m-1}x^{n-1}xy(xy)^{k-1} \\ &= y^{m-1}x^{n-1}(xy)^k,\end{aligned}$$

所以 $(xy)^{k-1}$ 也是 S 的左零元. 显然上述过程可以继续下去. 所以矛盾. 因此必有 $xy \in G$，即 G 是 S 的子半群. 显然 G 还是 S 的子群.

令 $N = S - G$，则 $S = G \dot{\cup} N$，这里 $N = \varnothing$，或 N 中的所有元素皆为 S 中的左谐零元.

(3)⇒(2) 设 λ 是 S 上的左同余，S/λ 是弱平坦 S- 系. 要证明 S/λ 满足条件(P). 为此，设 $x, y \in S$，使得 $x\lambda y$.

设 $x \in G, y \in N$，由命题 2.11 知存在 $s, t \in S$，使得 $xs = yt$，且 $s(\lambda \vee \Delta x)1, t(\lambda \vee \Delta y)1$. 因为 $x \in G$，所以存在 $x' \in S$，使得 $x'x = 1$，因此 $u(\Delta x)v$ 当且仅当 $u = v$. 故有 $s\lambda 1$. 又由于 $y \in N$，所以 xs

$= yt \in N$,从而 $s \in N$. 所以存在自然数 n,使得 s^n 是 S 的左零元. 显然 $s^n \lambda 1$. 设 $u,v \in S$,使得 $u\lambda v$,则 $us^n \lambda u \lambda v \lambda vs^n$. 又 us^n, vs^n 都是 S 中的左零元,所以由引理 6.7 知 $us^n = vs^n$. 这说明映射 $f: S/\lambda \to Ss^n$,

$$f(\bar{u}) = us^n \qquad (\forall\, \bar{u} \in S/\lambda)$$

是有定义的. 显然 f 还是 S- 满同态. 设 $us^n = vs^n$,则有 $u\lambda us^n = vs^n\lambda v$,即 $\bar{u} = \bar{v}$. 所以 f 还是单的,从而 $S/\lambda \simeq Ss^n$ 是投射 S- 系,所以满足条件(P).

因此下面假设满足 $x\lambda y$ 的 $x \in G$ 和 $y \in N$ 不存在.

因为 S/λ 是弱平坦 S- 系,所以对于 $x\lambda y$,存在 $s,t \in S$,使得 $xs = yt$, $s(\lambda \vee \Delta x)1$, $t(\lambda \vee \Delta y)1$. 考虑如下两种情形:

(i) $x,y \in G$. 此时有 $s\lambda 1 \lambda t$,且 $xs = yt$;

(ii) $x,y \in N$. 下证存在 $u \in S$,使得 $xu = xs$ 且 $u\lambda 1$.

由 $s(\lambda \vee \Delta x)1$ 可知存在 $s_1,\cdots,s_{2n-1} \in S$,使得

$$s = s_0\lambda s_1(\Delta x)s_2\cdots s_{2i}\lambda s_{2i+1}(\Delta x)s_{2i+2}\cdots s_{2n-1}(\Delta x)s_{2n} = 1.$$

设 $s_0,s_1,\cdots,s_{2n-1}$ 中有某个元素在 N 中. 因为 $1 \in G$,所以存在 j,使得 $s_j \in N$, $s_{j+1} \in G$ 且 $s_j(\Delta x)s_{j+1}$. 因此 $xs_j = xs_{j+1}$,故 $x = xs_js_{j+1}^{-1}$. 因为 $s_js_{j+1}^{-1} \in N$,所以存在 n,使得 $(s_js_{j+1}^{-1})^n$ 是 S 的左零元,从而 $x = x(s_js_{j+1}^{-1})^n$ 也是 S 的左零元. 所以此时可令 $u = 1$.

设 $s_0,s_1,\cdots,s_{2n-1} \in G$. 令 $u = s_{2n-1}^{-1}s_{2n-2}s_{2n-3}^{-1}s_{2n-4}\cdots s_1^{-1}s_0$,因为 $s_{2i-1}(\Delta x)s_{2i}$,所以 $xs_{2i-1} = xs_{2i}$,故 $x = xs_{2i}s_{2i-1}^{-1}$. 因此

$$\begin{aligned} xu &= xs_{2n-1}^{-1}s_{2n-2}\cdots s_2s_1^{-1}s_0 \\ &= xs_{2n}s_{2n-1}^{-1}s_{2n-2}\cdots s_2s_1^{-1}s_0 \\ &= xs_{2n-2}s_{2n-3}^{-1}\cdots s_2s_1^{-1}s_0 = \cdots \\ &= xs_2s_1^{-1}s_0 = xs_0 = xs. \end{aligned}$$

又因为 $s_{2i}\lambda s_{2i+1}$,所以 $s_{2i+1}^{-1}s_{2i}\lambda 1$,因此

$$u = s_{2n-1}^{-1}s_{2n-2}\cdots s_1^{-1}s_0\lambda s_{2n-1}^{-1}s_{2n-2}\cdots s_3^{-1}s_2\lambda\cdots\lambda s_{2n-1}^{-1}s_{2n-2}\lambda 1.$$

同理可以证明存在 $v \in S$,使得 $yv = yt$ 且 $v\lambda 1$. 所以 $xu = yv$ 且 $u\lambda 1\lambda v$. 故 S/λ 满足条件(P).

(2)⇒(1)　显然. //

对于非周期幺半群,定理 7.1 不再成立. 这可由下例说明. 事实上,下例说明的内容更多:当所有弱平坦 S- 系满足条件(P) 时,S 中可以有既非可消又非左谐零的元素.

例 7.2　设 $S = \langle x,y \mid xy = y = yx\rangle \cup \{1\}$,则 S 是交换幺半群,幂等元只有一个:1.

容易证明 $S = \{x^m \mid m = 1,2,\cdots\} \cup \{y^n \mid n = 1,2,\cdots\} \cup \{1\}$,且 $x^m y^n = y^n x^m$. 显然 $\langle y\rangle$ 中的任意元素都不是左可消元,且不是左谐零元.

设 A 是弱平坦 S- 系,$a,a' \in A, s,t \in S$,满足 $sa = ta'$. 要证明存在 $u,v \in S, a'' \in A$,使得 $su = tv, a = ua'', a' = va''$. 如果 $s = 1$,则 $a = ta', a' = 1 \cdot a', st = t \cdot 1$. 同理若 $t = 1$,则结论也成立. 因此下设 $s \neq 1, t \neq 1$.

因为 S 是弱平坦的,所以有

$$
\begin{aligned}
& & a &= s_1 a_1, \\
s s_1 &= z_2 t_1, & t_1 a_1 &= s_2 a_2, \\
z_2 s_2 &= z_3 t_2, & t_2 a_2 &= s_3 a_3, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
z_n s_n &= t t_n, & t_n a_n &= a',
\end{aligned}
$$

这里 $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n \in S, a_1,\cdots,a_n \in A, z_2,\cdots,z_n \in \{s,t\}$.

设 $n = 1$,则 $a = s_1 a_1, a' = t_1 a_1, s s_1 = t t_1$,所以结论成立. 下设 $n > 1$. 考虑以下三种情形:

(i) $s = x^k, t = x^l, 1 \leqslant k \leqslant l$.

此时每个 $z_i = x^{k_i}$,其中 $k_i \geqslant k$. 显然 x^k 是 S 的左可消元,所以有

$$
\begin{aligned}
& & a &= x^{k_2 - k} s_2 a_2, \\
s x^{k_2 - k} s_2 &= x^{k_3} t_2, & t_2 a_2 &= s_3 a_3, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
z_n s_n &= t t_n, & t_n a_n &= a'.
\end{aligned}
$$

由归纳假定即可得结论.

(ii) $s = x^k, t = y^l, k, l \geqslant 1$.

如果 $z_2 = x^k$,则由 x^k 左可消可知 $s_1 = t_1$. 所以

$$\begin{aligned} & & a &= s_2 a_2, \\ ss_2 &= z_3 t_2, & t_2 a_2 &= s_3 a_3, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ z_n s_n &= tt_n, & t_n a_n &= a'. \end{aligned}$$

所以可用归纳假定得出结论.

因此设 $z_2 = y^l$. 此时由 $ss_1 = z_2 t_1$ 可得 $x^k s_1 = y^l t_1$. 所以肯定有 $s_1 = y^p, p \geqslant 1$. 利用等式 $y^p = x^k y^p$ 和 $y^l = x^k y^l$ 可得如下等式组:

$$\begin{aligned} & & a &= z_2 s_2 a_2, \\ sz_2 s_2 &= z_3 t_2, & t_2 a_2 &= s_3 a_3, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ z_n s_n &= tt_n, & t_n a_n &= a'. \end{aligned}$$

所以结论可由归纳假定得出.

若 $s = y^k, t = x^l$,则证明方法同上.

(iii) $s = y^k, t = y^l, 1 \leqslant k \leqslant l$.

此时有

$$\begin{aligned} & & a &= x_1^{p_1} a_1, \\ y^k x_1^{p_1} &= y^{k_2} y_1^{m_1}, & y_1^{m_1} a_1 &= x_2^{p_2} a_2, \\ y^{k_2} x_2^{p_2} &= y^{k_3} y_2^{m_2}, & y_2^{m_2} a_2 &= x_3^{p_3} a_3, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ y^{k_n} x_n^{p_n} &= y^l y_n^{m_n}, & y_n^{m_n} a_n &= a', \end{aligned}$$

其中 $a_i \in A, x_i, y_i \in \{x, y\}, m_i, p_i \geqslant 0, k_i \geqslant k$. 设 $m_1 = 0$,则 $y_1^{m_1} = 1$. 所以上述等式组中等式的个数可减少. 若 $p_2 = 0$,则同理等式的个数可减少. 故设 $m_1, p_2 \geqslant 1$.

设 $y_1 = x_2 = y$. 由 $y^k x_1^{p_1} = y^{k_2} y_1^{m_1}$ 可得 $y^k x_1^{p_1} = y^{k_2 + m_1}$. 若 $x_1 = x$,则 $k = k_2 + m_1$,但 $m_1 \geqslant 1, k_2 \geqslant k$,矛盾. 所以 $x_1 = y$,从而有 $k + p_1 = k_2 + m_1$. 因此,$a = y^{p_1} a_1 = y^{k_2 + m_1 - k} a_1 = y^{k_2 - k} y^{m_1} a_1 =$

$y^{k_2-k}y^{p_2}a_2 = y^{k_2+p_2-k}a_2$，且 $y^k y^{p_2+k_2-k} = y^{k_2}y^{p_2} = y^{k_3}y_2^{m_2}$，故有

$$
\begin{aligned}
& & a &= y^{k_2+p_2-k}a_2, \\
y^k y^{k_2+p_2-k} &= y^{k_3}y_2^{m_2}, & y_2^{m_2}a_2 &= x_3^{p_3}a_3, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
y^{k_n}x_n^{p_n} &= y^l y_n^{m_n}, & y_n^{m_n}a_n &= a',
\end{aligned}
$$

由归纳假定即可得结论.

设 y_1 和 x_2 都是 x 或者有某一个是 x. 由等式 $y_1^{m_1}a_1 = x_2^{p_2}a_2$ 及已证明的情形(i)、(ii) 可知存在 $a'' \in A, u, v \in S$，使得 $y_1^{m_1}u = x_2^{p_2}v, a_1 = ua'', a_2 = va''$. 所以有

$$
\begin{aligned}
& & a &= x_1^{p_1}ua'', \\
y^k x_1^{p_1}u &= y^{k_3}y_2^{m_2}v, & y_2^{m_2}va'' &= x_3^{p_3}a_3, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
y^{k_n}x_n^{p_n} &= y^l y_n^{m_n}, & y_n^{m_n}a_n &= a',
\end{aligned}
$$

由归纳假定即可完成证明. 所以 A 满足条件(P).

此即证明了任意弱平坦 S- 系都满足条件(P).

§8　单循环系的平坦性

由前几节的讨论可知，关于循环系的平坦性的研究还远没有结束，例如尚不知道如何刻画所有循环平坦系满足条件(P) 的幺半群，本节讨论一类简单的循环系的平坦性. 即使对这类较简单循环系的平坦性，仍有许多问题是没有解决的.

本节的主要结果选自于[27].

定义 8.1　设 S 是幺半群，把形如 $S/\lambda(s,t)$ 的循环系叫做单循环系.

设 $S = \langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$，令 $\lambda = \lambda(1,2) \vee \lambda(1,3)$，则 S/λ 不是单循环系.

为了以后的应用，先证明

命题 8.2 设 S 是幺半群，λ 是 S 上的左同余，则有

(1) S/λ 是自由 S- 系当且仅当存在 $u,v\in S$，使得 $uv=1$，且对任意 $x,y\in S$，$xv=yv\Leftrightarrow x\lambda y$；

(2) S/λ 是投射的当且仅当存在 $e\in S$，使得 $e\lambda 1$，且对任意 x，$y\in S$，$x\lambda y\Rightarrow xe=ye$；

(3) S/λ 是主弱平坦的当且仅当对任意 $u,v,x\in S$，若 $xu\lambda xv$，则 $u(\lambda\vee\Delta x)v$；

(4) S/λ 是挠自由的当且仅当对任意 $u,v\in S$ 以及 S 的任意左可消元 c，若 $cu\lambda cv$，则 $u\lambda v$.

证明 (1) 作映射 $f:S/\lambda\to S$ 为

$$f(\bar{s})=sv,\quad \forall\, s\in S.$$

由条件可知 f 是有定义的. 显然 f 是 S- 单同态. 对任意 $t\in S$，$t=t\cdot 1=tuv=f(\overline{tu})$. 所以 f 是满的，从而 $S/\lambda\simeq S$ 是自由 S- 系.

反过来，设 S/λ 是自由 S- 系，则有 S- 同构 $f:S/\lambda\to S$. 设 $f(\bar{1})=v\in S$，$f(\bar{u})=1$，其中 $u\in S$，则 $uv=uf(\bar{1})=f(\bar{u})=1$，且对任意 $x,y\in S$，$x\lambda y\Leftrightarrow xv=yv$.

(2) 设存在 $e\in S$，使得 $e\lambda 1$ 且 $x\lambda y\Rightarrow xe=ye$. 作映射 $f:S/\lambda\to Se$ 为

$$f(\bar{s})=se,\quad \forall\, s\in S.$$

由条件知 f 是有定义的. 显然 f 是 S- 满同态. 若 $se=te$，则 $s\lambda se=te\lambda t$，所以 f 是单的，故有 S- 同构 $S/\lambda\simeq Se$. 由条件易知 $e^2=e$. 所以 S/λ 是投射的.

反过来，设 S/λ 是投射的，则自然满同态 $\sigma:S\to S/\lambda$ 是可收缩的，即存在 S- 同态 $g:S/\lambda\to S$，使得 $\sigma g=1$. 设 $g(\bar{1})=e\in S$，则 $\bar{1}=\sigma g(\bar{1})=\sigma(e)=\bar{e}$，即 $e\lambda 1$. 设 $x\lambda y$，则 $xe=xg(\bar{1})=g(\bar{x})=g(\bar{y})=yg(\bar{1})=ye$.

(3) 设 S/λ 是主弱平坦的，$u,v,x\in S$ 满足 $xu\lambda xv$，则 $\overline{xu}=\overline{xv}$，所以在 $S\otimes S/\lambda$ 中有 $x\otimes\bar{u}=x\otimes\bar{v}$. 由 S/λ 的主弱平坦性即知在 $xS\otimes S/\lambda$ 中有 $x\otimes\bar{u}=x\otimes\bar{v}$. 所以存在 $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$，使得

$$
\begin{aligned}
& & \bar{u} &= s_1\bar{1},\\
xs_1 &= xt_1, & t_1\bar{1} &= s_2\bar{1},\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
xs_n &= xt_n, & t_n\bar{1} &= \bar{v}.
\end{aligned}
$$

因此有

$$u\lambda s_1(\Delta x)t_1\lambda s_2\cdots\lambda s_n(\Delta x)t_n\lambda v,$$

即 $u(\lambda \vee \Delta x)v$.

反过来，设 $x\in S,\bar{u},\bar{v}\in S/\lambda$，在 $S\otimes S/\lambda$ 中有 $x\otimes\bar{u}=x\otimes\bar{v}$，则 $x\bar{u}=x\bar{v}$，所以 $xu\lambda xv$. 由条件即知 $u(\lambda\vee\Delta x)v$. 所以存在 $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$，使得

$$u\lambda s_1(\Delta x)t_1\lambda s_2(\Delta x)t_2\cdots\lambda s_n(\Delta x)t_n=v.$$

因此在 $xS\otimes S/\lambda$ 中有

$$
\begin{aligned}
x\otimes\bar{u} &= x\otimes\overline{s_1}=xs_1\otimes\bar{1}=xt_1\otimes\bar{1}=x\otimes\overline{t_1}\\
&= x\otimes\overline{s_2}=\cdots=x\otimes\overline{s_n}=xs_n\otimes\bar{1}\\
&= xt_n\otimes\bar{1}=x\otimes\overline{t_n}=x\otimes\bar{v}.
\end{aligned}
$$

所以 S/λ 是主弱平坦的.

(4) 设 S/λ 是挠自由的，c 是 S 的左可消元，$u,v\in S$，满足 $cu\lambda cv$，则 $c\bar{u}=c\bar{v}$，所以 $\bar{u}=\bar{v}$，即 $u\lambda v$.

反过来，容易证明 S/λ 是挠自由的. //

S/λ 是强平坦系（或平坦系，弱平坦系，满足条件(P)）的等价刻画已在前几节中出现过.

设 $w\in S$，t 是 S 的正则元，则推论 6.5 中已经证明了 $S/\lambda(tw,t)$ 是平坦 S- 系. 事实上有

定理 8.3 以下几条是等价的

(1) 对任意 $w,t\in S$，$S/\lambda(tw,t)$ 是平坦的；

(2) 对任意 $w,t\in S$，$S/\lambda(tw,t)$ 是弱平坦的；

(3) 对任意 $w,t\in S$，$S/\lambda(tw,t)$ 是主弱平坦的；

(4) S 是正则幺半群.

证明 由推论 6.5 及下面的命题即得本定理. //

命题 8.4　设 $w,t\in S,tw\neq t,\lambda=\lambda(tw,t)$. 若 S-系 S/λ 是主弱平坦的,则 t 是 S 的正则元.

证明　由于 $tw\lambda t$,所以由命题 8.2 知 $w(\lambda\vee\Delta t)1$. 记 $\Phi=\lambda\circ\Delta t$,$n$ 是使得 $w\Phi^n 1$ 的最小非负整数. 由于 $tw\neq t$,所以 $n\geqslant 1$. 设

$$w=u_1\lambda v_1(\Delta t)u_2\lambda v_2\cdots u_n\lambda v_n(\Delta t)1,$$

则 $tv_1=tu_2,tv_2=tu_3,\cdots,tv_n=t$,且对于 $u_i\lambda v_i$,由引理 6.1 知存在 $m_i,p_i\geqslant 0$,使得 $u_iw^{m_i}=v_iw^{p_i}(1\leqslant i\leqslant n)$,且

$$u_iw^k,v_iw^l\in St,\quad 0\leqslant k<m_i,0\leqslant l<p_i.$$

设 $p_n>0$,则 $v_n\in St$,所以 $t=tv_n\in tSt$,故 t 是正则元. 因此设 $p_n=0$. 此时 $t=tv_n=tu_nw^{m_n}=tv_{n-1}w^{m_n}$. 如果 $m_n<p_{n-1}$,则 $v_{n-1}w^{m_n}\in St$,从而 $t\in tSt$. 故设 $m_n\geqslant p_{n-1}$. 因此

$$\begin{aligned}t&=tv_{n-1}w^{m_n}=tv_{n-1}w^{p_{n-1}}w^{m_n-p_{n-1}}=tu_{n-1}w^{m_{n-1}+m_n-p_{n-1}}\\&=tu_{n-1}w^{m_n-p_{n-1}+m_{n-1}}=tv_{n-2}w^{m_n-p_{n-1}+m_{n-1}}.\end{aligned}$$

如果 $m_n-p_{n-1}+m_{n-1}<p_{n-2}$,则 $v_{n-2}w^{m_n-p_{n-1}+m_{n-1}}\in St$,从而 $t\in tSt$. 故设 $m_n-p_{n-1}+m_{n-1}\geqslant p_{n-2}$. 所以有

$$\begin{aligned}t&=tv_{n-2}w^{p_{n-2}}w^{m_n-p_{n-1}+m_{n-1}-p_{n-2}}\\&=tu_{n-2}w^{m_n-p_{n-1}+m_{n-1}-p_{n-2}+m_{n-2}}\\&=tv_{n-3}w^{m_n-p_{n-1}+m_{n-1}-p_{n-2}+m_{n-2}}.\end{aligned}$$

继续上述过程,则有两种可能出现:$t\in tSt$,或者有

$$t=tv_1w^{\sum_{i=2}^{n}(m_i-p_i)},$$

这里 $\sum_{i=2}^{n}(m_i-p_i)\geqslant p_1$. 对于第一种情形,已经没有什么可证的了. 对于第二种情形,有

$$t=tu_1w^{\sum_{i=2}^{n}(m_i-p_i)-p_1+m_1}=tw^{\sum_{i=1}^{n}(m_i-p_i)+1},$$

这里 $\sum_{i=1}^{n}(m_i-p_i)\geqslant 0$. 下面证明此时仍有 t 是正则元.

设 $m_1>0$,则 $u_1\in St$,所以 $tw=tu_1\in tSt$. 设 $tw=txt,x\in S$,则 $tw^2=txtw=tx(txt)=(tx)^2t$. 用简单的数学归纳法可证明

对任意正整数k，$tw^k=(tx)^k t$. 令$k=\sum_{i=1}^{n}(m_i-p_i)+1$，则$t=tw^k=(tx)^k t\in tSt$，所以$t$是正则元.

设$m_1=0$，则$tw=tu_1=tv_1w^{p_1}=tu_2w^{p_1}$. 如果$p_1<m_2$，则$u_2w^{p_1}\in St$，故$tw\in tSt$. 类似于前段的证明可知$t$是正则元. 设$p_1\geqslant m_2$，则

$$\begin{aligned}tw&=tu_2w^{m_2}w^{p_1-m_2}=tv_2w^{p_1-m_2+p_2}\\&=tu_3w^{p_1-m_2+p_2}.\end{aligned}$$

如果$p_1-m_2+p_2<m_3$，则$u_3w^{p_1-m_2+p_2}\in St$，故$tw\in tSt$，从而t是正则元. 设$p_1-m_2+p_2\geqslant m_3$，则

$$\begin{aligned}tw&=tu_3w^{m_3}w^{p_1-m_2+p_2-m_3}=tv_3w^{p_1-m_2+p_2-m_3+p_3}\\&=tu_4w^{p_1-m_2+p_2-m_3+p_3}.\end{aligned}$$

继续上述过程，则或者t是正则元，或者有

$$tw=tu_nw^{\sum_{i=1}^{n-1}(p_i-m_i)},$$

这里$\sum_{i=1}^{n-1}(p_i-m_i)\geqslant m_n$. 所以

$$tw=tv_nw^{\sum_{i=1}^{n-1}(p_i-m_i)-m_n+p_n}=tw^{\sum_{i=1}^{n}(p_i-m_i)},$$

且$\sum_{i=1}^{n}(p_i-m_i)\geqslant 0$.

因此$\sum_{i=1}^{n}(p_i-m_i)=0$，从而$tw=t$. 矛盾. 所以$t$是正则元. //

设$t,w\in S$. 称t是w-正则的，如果$tw\neq t$，且对S的任意左可消元c，任意$u\in S$，若$cu\in St$，则$u\lambda(tw,t)uw$.

如果S只含有一个左可消元1，则对任意$t,w\in S$，若$tw\neq t$，则t是w-正则的. 事实上，若$u=xt$，$x\in S$，则$u=xt\lambda(tw,t)xtw=uw$.

设t是S中的正则元，$w\in S$，$tw\neq t$. 若$cu=xt$，$x\in S$，则$cu=xt=xtt't=cut't$，所以$u=ut't\lambda(tw,t)ut'tw=uw$. 故正则元$t$若满足$tw\neq t$，则$t$是$w$-正则的.

命题8.5 设$t,w\in S$,$tw\neq t$,则$S/\lambda(tw,t)$是挠自由系当且仅当t是w-正则的.

证明 记$\lambda=\lambda(tw,t)$.设S/λ是挠自由的,$u,x\in S$,c是S的左可消元,$cu=xt$,则$cu=xt\lambda xtw=cuw$.由命题8.2即知$u\lambda uw$,所以t是w-正则的.

反过来,设t是w-正则的.假定$u,v\in S$,c是S的左可消元,且$cu\lambda cv$.由引理6.1知存在$m,n\geqslant 0$,使得$cuw^m=cvw^n$,且cuw^i,$cvw^j\in St$,$0\leqslant i<m$,$0\leqslant j<n$.由于c是左可消的,所以有$uw^m=vw^n$.若$m>0$,则$cu\in St$,所以$u\lambda uw$.若$m>1$,则$cuw\in St$,所以$uw\lambda uw^2$,从而有$u\lambda uw^2$.继续上述过程可得$u\lambda uw^m$.同理可得$v\lambda vw^n$.所以$u\lambda v$,从而由命题8.2知S/λ是挠自由的. //

推论8.6 设S是幺半群,$t\in S$,则$S/\lambda(t^2,t)$是挠自由系的充要条件是:对S的任意左可消元c,任意元u,若$cu\in St$,则$u\in St$.

证明 设$u=xt\in St$,则$u=xt\lambda(t^2,t)xt^2=ut$.反过来设$u\lambda(t^2,t)ut$,则由引理6.1知存在$m,n\geqslant 0$,使得$ut^m=utt^n$,且$ut^i$,$utt^j\in St$,$0\leqslant i<m$,$0\leqslant j<n$.若$m=0$,则$u=ut^{n+1}\in St$.若$m>0$,则$u\in St$.所以$u\in St$当且仅当$u\lambda(t^2,t)ut$.

由命题8.5知$S/\lambda(t^2,t)$是挠自由系当且仅当$t^2=t$,或t是t-正则的.所以由前段证明的结果即可知结论成立(若$t=t^2$,则$cu=xt=xt^2=cut$,所以$u=ut\in St$). //

命题8.7 设$w,t\in S$,$tw\neq t$,$\lambda=\lambda(tw,t)$,则以下条件是等价的:

(1) S/λ满足条件(P);

(2) $t\mathscr{L}1$,或者$t\mathscr{R}tw\mathscr{L}1$;

(3) $\lambda=\lambda(y,1)$,其中$y\in S$;

证明 (3)⇒(1) 由命题3.1即得.

(2)⇒(3) 设$t\mathscr{L}1$,则存在$x\in S$,使得$xt=1$.所以由$tw\lambda t$即得$w\lambda 1$.反之若$w\theta 1$,则显然有$tw\theta t$,这里θ是S上的任意包含$(w,1)$的左同余.所以$\lambda=\lambda(w,1)$.

设 $t\mathscr{R}tw\mathscr{L}1$，则存在 $q,z\in S$，使得 $t=twq,ztw=1$. 所以 $t=twq=tw\cdot 1\cdot q=twztwq=twzt$，因此对 S 上的任意左同余 θ 有

$$tw\theta t\Leftrightarrow zt\theta 1.$$

所以有 $\lambda=\lambda(zt,1)$.

(1)⇒(2) 设 S/λ 满足条件(P). 因为 $tw\lambda t$，所以由命题 1.1 知存在 $u,v\in S$，使得 $twu=tv$ 且 $u\lambda 1\lambda v$. 设 $t\mathscr{L}1$ 不成立，即 $1\notin St$. 考虑以下三种情形：

(i) $u=1$. 此时 $tw=tv,v\lambda 1$. 因为 $tw\neq t$，所以 $v\neq 1$. 由引理 6.1 知存在 $m,n\geqslant 0$，使得 $vw^m=1\cdot w^n$，且 $vw^i,w^j\in St,0\leqslant i<m,0\leqslant j<n$. 若 $n>0$，则 $1=w^0\in St$，矛盾. 所以 $n=0$. 故 $vw^m=1$，从而 $m>0$. 因此 $vw^{m-1}=xt\in St$. 由 $xtw=vw^m=1$ 及 $tw=tv$ 可得 $xtv=1$. 所以 $w^m=1\cdot w^m=xtvw^m=xt$. 因此 $1=vw^m=vxt\in St$. 矛盾.

(ii) $v=1$. 此时 $twu=t$ 且 $u\lambda 1$. 同样 $u\neq 1$. 由引理 6.1 知存在 $m,n\geqslant 0$，使得 $uw^m=1\cdot w^n,uw^i,w^j\in St,0\leqslant i<m,0\leqslant j<n$. 显然 $n=0$(否则 $1\in St$). 所以 $m>0$. 设 $uw^{m-1}=xt$，则 $xtw=1,xt=x(twu)=(xtw)u=u$，所以 $t=twu=twxt$. 这说明 $t\mathscr{R}tw\mathscr{L}1$.

(iii) $u\neq 1,v\neq 1$. 此时有 $twu=tv,u\lambda 1\lambda v$. 对于 $u\lambda 1$ 和 $v\lambda 1$ 利用引理 6.1 知存在 $m,p,n,q\geqslant 0$，使得 $uw^m=1\cdot w^p,vw^n=1\cdot w^q$，$uw^i,vw^j,w^k,w^h\in St,0\leqslant i<m,0\leqslant j<n,0\leqslant k<p,0\leqslant h<q$. 若 $p>0$，则 $1=w^0\in St$，矛盾. 所以 $p=0$. 同理可证 $q=0$. 因此有 $uw^m=1=vw^n$. 显然 $m,n>0$(否则 $u=1$，或 $v=1$). 若 $m=n$，则在 $twu=tv$ 的两边右乘 w^m 即得 $tw=t$，矛盾. 设 $m<n$，则 $t=tvw^n=twuw^n=twuw^mw^{n-m}=tw(uw^m)w^{n-m}=tww^{n-m}$. 设 $uw^{m-1}=xt$，则 $xt=x(tw^{n-m+1})=(xtw)w^{n-m}=(uw^{m-1}w)w^{n-m}=w^{n-m}$. 所以

$$1=vw^n=vw^mw^{n-m}=vw^mxt\in St,$$

矛盾.

所以只能有 $m > n$. 由 $vw^n = 1$ 及 $twu = tv$ 得 $t = t \cdot 1 = tvw^n = twuw^n$，所以 $tw^{m-n} = twuw^n w^{m-n} = twuw^m = tw$. 设 $uw^{m-1} = xt$，则 $xtw^{m-n} = xtww^{m-n-1} = xtw$，而 $xtw = 1$，所以 $w^{m-n-1} = 1$. 如果 $m - n > 1$，则 w 是可逆元，所以由 $xtw = 1$ 即得 $wxt = 1$，因此 $1 \in St$，矛盾. 所以 $m - n = 1$. 继续设 $uw^{m-1} = xt$，则 $t = t \cdot 1 = tvw^n = twuw^n = tw(uw^{m-1}) = twxt$. 所以有 $t\mathscr{R}tw\mathscr{L}1$. //

命题 8.8 设 $t, w \in S$, $tw \neq t$, $\lambda = \lambda(tw, t)$，则以下三条是等价的：

(1) S/λ 是投射的；

(2) S/λ 是强平坦的；

(3) t 是左可逆元且 w 是周期元（即存在 $m \geqslant 0$，使得 $w^m = w^{m+1}$）.

证明 (1)⇒(2) 这是显然的.

(2)⇒(3) 设 S/λ 是强平坦的，则对于 $tw\lambda t$，由命题 1.2 知存在 $u \in S$，使得 $twu = tu$, $u\lambda 1$. 显然 $u \neq 1$（否则 $tw = t$）. 由引理 6.1 知存在 $m, n \geqslant 0$，使得 $uw^m = w^n$, $uw^i, w^j \in St$, $0 \leqslant i < m$, $0 \leqslant j < n$. 若 $n = 0$，则 $uw^m = 1$，又得到 $tw = t$，矛盾. 所以 $n > 0$，从而 $1 = w^0 \in St$，这说明 t 是左可逆元. 现在很容易证明 $\lambda = \lambda(w, 1)$. 所以由命题 1.4 知 w 是周期元.

(3)⇒(2) 若 t 是左可逆元，则 $\lambda = \lambda(w, 1)$. 又因为 w 是周期元，所以由命题 1.4 知 S/λ 是强平坦的.

(2)⇒(1) 由以下命题即得. //

命题 8.9 单循环系的投射性与强平坦性是一致的.

证明 设 S/λ 是强平坦 S-系，其中 $\lambda = \lambda(s, t)$. 由命题 1.2 知存在 $e \in S$，使得 $se = te$，且 $e\lambda 1$. 设 $x, y \in S$ 满足 $x\lambda y$, $x \neq y$，则存在 $t_1, \cdots, t_n \in S$，使得

$$x = t_1 x_1, t_1 y_1 = t_2 x_2, \cdots, t_n y_n = y,$$

其中 $\{x_i, y_i\} = \{s, t\}$, $i = 1, \cdots, n$. 因为 $se = te$，所以 $x_i e = y_i e$，因此有 $xe = ye$. 由命题 8.2 即知 S/λ 是投射的. //

命题 8.10 设 $t, w \in S$, $tw \neq t$, $\lambda = \lambda(tw, t)$，则以下两条等

价：

(1) S/λ 是自由系；

(2) t 是左可逆元，且存在 n，使得 $w^n = w^{n+1}$，存在 $u,v \in S$，使得 $uv = 1$，对任意 $x,y \in S$ 有 $xv = yv \Leftrightarrow xw^n = yw^n$.

证明 (1)⇒(2) 设 S/λ 是自由的，则由命题 8.8 即知 t 是左可逆元，w 是周期元. 所以 $\lambda = \lambda(w,1)$，且存在 n，使得 $w^n = w^{n+1}$. 由引理 6.1 易知对任意 $x,y \in S$，$x\lambda(w,1)y$ 当且仅当 $xw^n = yw^n$. 所以由命题 8.2 即知结论成立.

(2)⇒(1) 利用命题 8.2 进行简单地验证. //

定理 8.11 对于幺半群 S，以下几条等价：

(1) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的挠自由系是平坦的；

(2) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的挠自由系是弱平坦的；

(3) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的挠自由系是主弱平坦的；

(4) 对于任意 $t,w \in S$，若 t 是 w- 正则的，则 t 是正则的.

证明 设 $S/\lambda(tw,t)$ 是挠自由的. 若 $tw = t$，则 $S/\lambda(tw,t)$ 显然是平坦的. 若 $tw \neq t$，则由命题 8.5 知 t 是 w- 正则的. 所以 t 是正则的，从而由推论 6.5 知 $S/\lambda(tw,t)$ 是平坦的. 此即完成了 (4)⇒(1). (3)⇒(4) 由命题 8.4 和命题 8.5 即得. //

定理 8.12 对于幺半群 S，以下几条等价：

(1) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的平坦系满足条件(P)；

(2) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的弱平坦系满足条件(P)；

(3) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的主弱平坦系满足条件(P)；

(4) 任意 $e \in E(S) - \{1\}$ 都是 S 的左零元.

证明 (3)⇒(2)⇒(1) 这是显然的.

(1)⇒(4) 由推论 6.6 的证明即得.

(4)⇒(3) 设 $t,w \in S$，$S/\lambda(tw,t)$ 是主弱平坦 S- 系. 若 $tw = t$，则 $S/\lambda(tw,t) \simeq S$ 显然是满足条件(P) 的. 设 $tw \neq t$，则由命题 8.4 知 t 是 S 中的正则元. 设 $t = tt't$，则 $t't \in E(S)$. 若 $t't \neq 1$，则由条件知 $t't$ 是 S 的左零元，所以 t 也是 S 的左零元，从而 $tw = t$，矛盾. 因此 $t't = 1$，从而 $\lambda(tw,t) = \lambda(w,1)$. 所以由命题 8.7 知

$S/\lambda(tw,t)$ 满足条件(P). //

定理 8.13 对于幺半群 S,以下两条是等价的:

(1) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的挠自由系满足条件(P);

(2) 对任意 $t,w \in S$,若 t 是 w- 正则的,则 t 是可逆元或左零元.

证明 (1)⇒(2) 设所有形如$S/\lambda(tw,t)$的挠自由系满足条件(P). 假定t是w- 正则的,则由定理8.11知t是正则元,所以存在$t' \in S$,使得$t = tt't$. 若$t't \neq 1$,则由定理8.12知$t't$是S的左零元,从而t是左零元. 若$tt' \neq 1$,则同理tt'是S的左零元,所以$t = tt't = (tt')t = tt'$ 也是左零元. 设$t't = 1$且$tt' = 1$,则t是可逆元.

(2)⇒(1) 设$t,w \in S$. 若$tw = t$,则显然$S/\lambda(tw,t)$满足条件(P). 设$tw \neq t$,且$S/\lambda(tw,t)$是挠自由S- 系,则t是w- 正则的,从而t是可逆元或左零元. 由此即知$S/\lambda(tw,t)$满足条件(P). //

定理 8.14 对于幺半群 S,以下两条等价:

(1) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的 S- 系满足条件(P);

(2) $S = G \dot{\cup} Z$,其中G是群,Z中的任意元都是S的左零元.

证明 (1)⇒(2) 由定理8.3知任意$t \in S$都是正则元,所以由定理8.13知t是可逆元或S的左零元. 由此即得(2).

(2)⇒(1) 由定理8.3和定理8.12即得. //

定理 8.15 对于幺半群 S,以下三条等价:

(1) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 且满足条件(P) 的 S- 系是投射的;

(2) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$且满足条件(P)的S- 系是强平坦的;

(3) S 中的任意元都是周期的.

证明 由命题1.3, 1.4,定理1.5和命题8.9即得结论. //

定理 8.16 对于幺半群 S,以下几条等价:

(1) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的平坦 S- 系是投射的;

(2) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的弱平坦 S- 系是投射的;

(3) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的主弱平坦 S- 系是投射的;

(4) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的平坦 S- 系是强平坦的;

(5) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的弱平坦 S- 系是强平坦的;

(6) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的主弱平坦 S- 系是强平坦的；

(7) S 是左谐零幺半群.

证明 只需证明(7)⇒(3) 和(4)⇒(7).

(7)⇒(3) 设 S 是左谐零幺半群，则任意 $e \in E(S) - \{1\}$ 都是 S 的左零元，且 S 中的任意元均为周期元. 所以由定理 8.12 和定理 8.15 以及命题 8.9 即得此结论.

(4)⇒(7) 由定理 8.12 和定理 8.15 即得. //

定理 8.17 对于幺半群 S，以下几条等价：

(1) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的 S- 系是投射的；

(2) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的 S- 系是强平坦的；

(3) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的挠自由 S- 系是投射的；

(4) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的挠自由 S- 系是强平坦的；

(5) $S = Z^1$，其中 $Z = \varnothing$ 或 Z 是左零半群.

证明 只需证明(4)⇒(5) 和(5)⇒(1).

(4)⇒(5) 设 $t \in S$ 不是左零元，则存在 $w \in S$，使得 $tw \neq t$. 设 $c \in S$ 是 S 的左可消元，且 $c \neq 1$. 由定理 8.16 知存在 n，使得 c^n 是左零元. 所以有 $c^n tw = c^n = c^n t$ 但 $tw \neq t$. 这说明 S 中除了 1 以外再没有左可消元. 所以由 $tw \neq t$ 即知 t 是 w- 正则的，因此 $S/\lambda(tw,t)$ 是挠自由系，从而是强平坦的. 由定理 8.13 即知 t 是可逆元.

设 $t \neq 1$，则由定理 8.16 知存在 m，使得 t^m 是左零元. 而 t^m 显然又是可逆元. 矛盾. 所以 $t = 1$. 这即证明了 S 中的非左零元只能是 1. 所以 $S = Z^1$，其中 $Z = \varnothing$，或 Z 是左零半群.

(5)⇒(1) 由定理 8.3 和定理 8.16 即得结论. //

定理 8.18 对于幺半群 S，以下两条等价：

(1) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的 S- 系是挠自由的；

(2) S 的任意左可消元是左可逆元.

证明 (2)⇒(1) 由定理 4.5.13 即得.

(1)⇒(2) 设 $s \in S$ 是左可消元，则 $S/\lambda(s^2,s)$ 是挠自由 S- 系. 显然有 $\overline{s^2} = \bar{s}$，所以 $s\bar{s} = s \cdot \bar{1}$，故 $\bar{s} = \bar{1}$. 因此 $s = 1$，或者存在 t_1，

$\cdots, t_n \in S$，使得

$$s = t_1c_1, t_1d_1 = t_2c_2, \cdots, t_nd_n = 1,$$

其中$\{c_i, d_i\} = \{s^2, s\}, i = 1, \cdots, n$. 所以存在$x \in S$，使得$xs = 1$. 因此$s$是左可逆元. //

定理 8.19 对于幺半群S，以下三条等价：

(1) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的投射S-系是自由的；

(2) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的强平坦S-系是自由的；

(3) 任意$e \in E(S)$，$e\mathscr{D}1$.

证明 (1)⇒(3) 设$e \in E(S)$，则由命题8.8知$S/\lambda(e,1)$是投射S-系. 设$e \neq 1$. 由命题8.10知存在$u, v \in S$，使得$uv = 1$，且对任意$x, y \in S$，$xv = yv \Leftrightarrow xe = ye$. 因为$e \cdot e = 1 \cdot e$，所以$ev = v$. 又因为$vu \cdot v = 1 \cdot v$，所以$vue = e$. 因此$e\mathscr{R}v$. 又显然$1\mathscr{L}v$，所以$e\mathscr{D}1$.

(1)⇔(2) 由命题8.9即得.

(3)⇒(1) 由以下的命题即得. //

命题 8.20 对于幺半群S，以下三条等价：

(1) 所有投射S-系是自由的；

(2) 所有循环投射S-系是自由的；

(3) 任意$e \in E(S)$，有$e\mathscr{D}1$.

证明 只需证明(3)⇒(1).

设$e \in E(S)$，则$e\mathscr{D}1$，所以存在$a \in S$，使得$e\mathscr{L}a, a\mathscr{R}1$，令$f: S \to Sa, f(s) = sa$，则$f$是$S$-满同态. 因为$a\mathscr{R}1$，所以存在$b \in S$，使得$ab = 1$. 设$sa = ta$，则易知有$s = t$，所以$f$是单同态. 因此$f$是$S$到$Sa = Se$的同构，故$Se$是自由$S$-系. 因为任意投射$S$-系都是$Se_i(e_i \in E(S))$的不交并，所以结论得证. //

定理 8.21 对于幺半群S，以下几条等价：

(1) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$且满足条件(P)的S-系是自由的；

(2) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的平坦S-系是自由的；

(3) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的弱平坦S-系是自由的；

(4) 所有形如$S/\lambda(tw,t)$的主弱平坦S-系是自由的；

(5) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的挠自由 S- 系是自由的；

(6) 所有形如 $S/\lambda(tw,t)$ 的 S- 系是自由的；

(7) 所有 S- 系是自由的；

(8) $S=\{1\}$.

证明 只需证明(1)⇒(8).

由定理 8.15 和定理 8.19 知 S 中的任意元都是周期元，且任意 $e\in E(S)$，$e\mathscr{D}1$. 设 $x\in S$，则存在 n，使得 $x^n=x^{n+1}$. 令 $e=x^n$，则存在 $u\in S$，使得 $e\mathscr{L}u\mathscr{R}1$. 所以 $uv=1$，$ue=u$，$su=e$. 对于 v，存在 m 使得 $v^m=v^{m+1}$. 所以 $v=1$，从而 $u=1$，故 $e=1=x^n$. 因此 $x=1$. //

下面考虑利用单循环 S- 系的同调性质对幺半群进行同调分类的问题. 实际上前面已经得到过许多这方面的结果.

命题 8.22 设 $s,t\in S$，$s\neq t$，$\lambda=\lambda(s,t)$. 如果 S/λ 是弱平坦 S- 系，则 s 或 t 是正则元.

证明 因为 $s\lambda t$，所以由命题 2.11 知存在 $u,v\in S$，使得 $su=tv$，且 $u(\lambda\vee\Delta s)1$，$v(\lambda\vee\Delta t)1$. 令 $\Phi=\lambda\circ\Delta s$，$\Psi=\lambda\circ\Delta t$. 设 u,v 满足 $su=tv$，$u\Phi^m1$，$v\Psi^n1$，且，使得 $m+n$ 最小. 因为 $s\neq t$，所以 $m+n>0$. 设 $m>0$，则存在 $w,z\in S$，使得 $u\lambda w(\Delta s)z\Phi^{m-1}1$. 因此 $sw=sz$. 如果 $u=w$，则 $tv=su=sw=sz$，而 $z\Phi^{m-1}1$，这与 $m+n$ 的最小性矛盾. 所以 $u\neq w$. 由 $u\lambda w$ 即知存在 $t_1,\cdots,t_n\in S$，使得

$$u=t_1c_1,t_1d_1=t_2c_2,\cdots,t_nd_n=w,$$

其中 $\{c_i,d_i\}=\{s,t\}$，$i=1,\cdots,n$. 所以 $u\in Ss\cup St$. 又存在 $a,b\in S$，使得 $u\Phi^{m-1}a\lambda b(\Delta s)1$. 设 $a=b$，考虑两种情形：

(i) $m=1$. 此时 $u=a=b$，所以 $su=sa=sb=s$，因此 $\lambda=\lambda(s,t)=\lambda(su,t)=\lambda(tv,t)$，而 $tv\neq t$. 所以由 S/λ 的弱平坦性，利用命题 8.4 即知 t 是正则元.

(ii) $m>1$. 此时存在 $c,d\in S$，使得 $u\Phi^{m-2}c\lambda d(\Delta s)a$. 所以 $sd=sa=sb=s$，因此 $u\Phi^{m-2}c\lambda d(\Delta s)1$，即 $u\Phi^{m-1}1$，矛盾.

设 $a\neq b$，则同上类似的证明可得 $b\in Ss\cup St$. 如果 $b\in Ss$，则 s 是正则元(因为 $sb=s$). 设 $b\in St$，则存在 $x\in S$，使得 $b=xt$，所

以 $s = sb = sxt$.

设 $n > 0$. 类似于上面的讨论可知 s 或 t 是正则元,或者存在 $y \in S$,使得 $t = tys$. 因此 $t = tys = ty(sxt) = tysxt$,即 t 是正则元.

设 $n = 0$,则 $v = 1$,所以 $su = t$,故 $\lambda = \lambda(s,t) = \lambda(s,su) = \lambda(su,s)$. 由 S/λ 的弱平坦性即知 s 是正则的.

以上证明了当 $m > 0$ 时结论成立. 同理可证当 $n > 0$ 时结论亦成立. //

命题 8.23 设 $z \in S$ 是 S 的左零元. 如果 $S/\lambda(s,z)$ 是弱平坦的,则 s 是正则的.

证明 若 $s = z$,则 s 是正则元. 设 $s \neq z$. 由命题 2.11 知存在 $u,v \in S$,使得 $su = zv = z$. 所以 $\lambda(s,z) = \lambda(su,s)$. 由 $S/\lambda(su,s)$ 的弱平坦性即知 s 是正则元. //

定理 8.24 对于幺半群 S,以下三条等价:

(1) 所有单循环平坦 S- 系满足条件(P);

(2) 所有单循环弱平坦 S- 系满足条件(P);

(3) 任意 $e \in E(S) - \{1\}$ 都是 S 的左零元.

证明 (2)⇒(1) 是显然的. (1)⇒(3) 由定理 8.12 即得. 只需证明(3)⇒(2).

设 $s,t \in S$,$S/\lambda(s,t)$ 是弱平坦 S- 系. 要证明 $S/\lambda(s,t)$ 满足条件(P). 显然可以假设 $s \neq t$. 由命题 8.22,可以假定 s 是正则元,所以 $s = ss's$,$s' \in S$.

设 $ss' \neq 1$,或 $s's \neq 1$,则 s 是左零元. 所以由命题 8.23 知 t 是正则元. 设 $t = tt't$,$t' \in S$. 若 $t't \neq 1$,或 $tt' \neq 1$,则 t 是左零元. 因为 $S/\lambda(s,t)$ 是弱平坦的,所以存在 $u,v \in S$,使得 $su = tv$,因此 $s = t$. 矛盾. 所以 $tt' = 1 = t't$,故 $\lambda(s,t) = \lambda(t's,1)$,从而 $S/\lambda(s,t)$ 满足条件(P).

设 $ss' = 1 = s's$,则 $\lambda(s,t) = \lambda(1,s't)$,所以 $S/\lambda(s,t)$ 满足条件(P). //

定理 8.25 对于幺半群 S,以下几条等价:

(1) 所有单循环挠自由 S- 系是投射的;

(2) 所有单循环挠自由 S- 系是强平坦的；

(3) 所有单循环 S- 系是投射的；

(4) 所有单循环 S- 系是强平坦的；

(5) $S = \{1\}$ 或 $S = \{1,0\}$.

证明 (3)⇒(4)⇒(2) 和(3)⇒(1)⇒(2) 是显然的.

(2)⇒(5) 设所有单循环挠自由 S- 系是强平坦的，则由定理 8.17 知 $S = Z^1$，其中 $Z = \varnothing$ 或 Z 是左零半群. 设 $Z \neq \varnothing$，$s,t \in Z$. 因为 S 的左可消元只有 1，所以 $S/\lambda(s,t)$ 是挠自由 S- 系，从而由条件知是强平坦的. 因为 $s\lambda(s,t)t$，所以存在 $u \in S$，使得 $su = tu$，故 $s = t$. 这说明若 $S \neq \{1\}$，则 S 中含有唯一的左零元. 因此 $S = \{1,0\}$.

(5)⇒(3) 若 $S = \{1\}$，则显然所有单循环 S- 系是投射的. 设 $S = \{1,0\}$，则由定理 5.3 知所有循环 S- 系满足条件(P). 又由定理 1.5 知所有满足条件(P) 的循环 S- 系是强平坦的. 所以由命题 8.9 知所有单循环 S- 系是投射的. //

定理 8.26 对于幺半群 S，以下两条等价：

(1) 所有单循环 S- 系满足条件(P)；

(2) $S = G$ 或 $S = G^0$，其中 G 是群.

证明 (1)⇒(2) 设所有单循环 S- 系满足条件(P)，则由定理 8.24 知任意 $e \in E(S) - \{1\}$ 都是 S 的左零元. 设 $x \in S$. 由命题 5.2 知 $x^2 = x$，或 x 是左可逆元. 如果任意 $x \in S$ 都是左可逆元，则 S 是群. 若 x 不是左可逆元，则 x 是左零元. 设 x, y 都是左零元，则由于 $S/\lambda(x,y)$ 满足条件(P)，所以存在 $u,v \in S$，使得 $xu = yv$，故 $x = y$. 这说明 S 中最多只有一个左零元.

类似于定理 5.3 的证明即知 $S = G$ 或 $S = G^0$，其中 G 是群.

(2)⇒(1) 由定理 5.3 即得结论. //

下面把利用单循环系的性质对幺半群进行同调分类的有关结果列成一个表，其中有许多结果是前面已证过但没有明确提出的，所以需重新考察前面定理的证明过程. 表中也遗留了许多还没有解决的问题. 该表选自[27].

所有单循环的…S系 \ 是(满足)	自由	投射	强平坦	条件(P)	平坦	弱平坦	主弱平坦	挠自由
投射	$\forall e=e^2$ $e\mathscr{D}1$ (8.20)							
强平坦	$\forall e=e^2$ $e\mathscr{D}1$ (8.20)	所有 (8.9)						
条件(P)	{1} (8.21)	$\forall x\in S$ x是周期元 (1.5)	$\forall x\in S$ x是周期元 (1.5)					
平坦	{1}	左谐零 (6.8)	左谐零 (6.8)	$\forall e\in E(S)-\{1\}$ 是左零元 (8.24)				
弱平坦	{1}	左谐零	左谐零	$\forall e\in E(S)-\{1\}$ 是左零元	?			
主弱平坦	{1}	?	?	?	?	?		
挠自由	{1}	$\{1\}\vee\{1,0\}$ (8.25)	$\{1\}\vee\{1,0\}$	?	?	?	?	
所有	{1}	$\{1\}\vee\{1,0\}$	$\{1\}\vee\{1,0\}$	$G\vee G^0$ (8.26)	?	正则且… (5.12)	正则 (5.7)	左可消元是左可逆元 (5.13)

§9 循环系的同调性质

§5—§7 三节主要讨论了和循环系的平坦性有关的一些问题，§8 研究了单循环系的同调性质. 本节考虑循环系的同调性质.

由命题 8.9 知对于单循环系 $S/\lambda(s,t)$，其投射性和强平坦性是一致的. 但是对于一般的循环系，投射性严格强于强平坦性. 这可从以下定理中看出.

定理 9.1 对于幺半群 S，以下条件等价：

(1) 所有循环的强平坦 S- 系是投射的；

(2) S 满足以下的条件(FP_1) 和(FP_2)：

(FP$_1$) 对任意$q_0,q_1,\cdots\in S$,若$q_{i-1}q_i=q_i,i=1,\cdots$,则存在$m$,使得对所有的$i=0,1,\cdots$,有$q_iq_m=q_m$;

(FP$_2$) 设M是$E(S)$的子集合,如果对任意$e_1,\cdots,e_n,f_1,\cdots,f_m\in M$,存在$f\in M$满足$e_1\cdots e_nf=f_1\cdots f_mf$,那么$S$的子半群$\langle M\rangle$中含有右零元.

证明 (2)⇒(1) 设Sx是强平坦的循环S-系.若$s,t\in S$,使得$sx=tx$,则由推论4.4.8知存在$q_0\in S$,使得$sq_0=tq_0$,且$x=q_0x$.对于$x=q_0x$,再由推论4.4.8知存在$q_1\in S$,使得$q_1=q_0q_1$,且$q_1x=x$.继续上述过程可知存在$q_0,q_1,\cdots\in S$,使得$q_ix=x(i=0,1,\cdots)$,且$q_{i-1}q_i=q_i(i=1,\cdots)$.由条件(FP$_1$)知存在$q_m$,使得$q_iq_m=q_m,i=0,1,\cdots$.显然$q_m\in E(S)$,且$q_mx=x$.令

$$M(s,t)=\{q_m\in S\mid 存在q_0,q_1,\cdots\in S,使得 q_iq_{i+1}=q_{i+1},q_ix=x,sq_i=tq_i, q_iq_m=q_m,i=0,1,\cdots\},$$

则$M(s,t)\neq\varnothing$.令

$$M=\bigcup_{s,t\in S}M(s,t),$$

则$M\subseteq E(S)$.

设$e_1,\cdots,e_n,f_1,\cdots,f_m\in M$,则$e_1\cdots e_nx=e_1\cdots e_{n-1}x=\cdots=e_1x=x$,同理$f_1\cdots f_mx=x$,所以$(e_1\cdots e_n)x=(f_1\cdots f_m)x$.由$M$的构造可知存在$f\in M(e_1\cdots e_n,f_1\cdots f_m)\subseteq M$,使得$e_1\cdots e_nf=f_1\cdots f_mf$.所以由条件(FP$_2$)知$\langle M\rangle$中存在右零元$e$.下面证明$Sx\simeq Se$.

作映射$\alpha:Sx\to Se$如下:

$$\alpha(sx)=se,\quad\forall s\in S.$$

设$sx=tx$,则由前面的讨论知存在$q_m\in M$,使得$sq_m=tq_m$,所以$se=sq_me=tq_me=te$.因此α是映射.显然α还是S-满同态.设$se=te$.因为$e\in\langle M\rangle$,所以$ex=x$,因此$sx=sex=tex=tx$.这说明α还是单同态.所以有S-同构$Sx\simeq Se$,从而Sx是投射的.

(1)⇒(2) 设$q_0,q_1,\cdots\in S$满足$q_{i-1}q_i=q_i,i=1,2,\cdots$.令$Q$是由$1,q_0,q_1,\cdots$生成的$S$的子半群.如下定义$S$上的关系$\sigma$:

$$s\sigma t \Leftrightarrow \text{存在 } p,q \in Q, r \in S, \text{使得 } s = rp, t = rq.$$

记λ为σ的传递包即$\lambda = \bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma^n$. 容易证明$\lambda$是$S$上的左同余. 下面先证明 S/λ 是强平坦 S- 系.

设 $u\lambda v$, 则存在 n', 使得 $u\sigma^{n'}v$. 所以存在 $u_1, \cdots, u_{n'-1}$, 使得 $u\sigma u_1 \sigma u_2 \cdots \sigma u_{n'-1} \sigma v$. 因此存在 $r_1, \cdots, r_{n'} \in S$, 使得

$$\begin{aligned} u &= r_1 q_{j_1} \cdots q_{j_{n_1}}, & u_1 &= r_1 q_{i_1} \cdots q_{i_{m_1}}, \\ u_1 &= r_2 q_{k_1} \cdots q_{k_{n_2}}, & u_2 &= r_2 q_{l_1} \cdots q_{l_{m_2}}, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ u_{n'-1} &= r_{n'} q_{s_1} \cdots q_{s_{n_{n'}}}, & v &= r_{n'} q_{t_1} \cdots q_{t_{m_n}}, \end{aligned}$$

这里带下标的$q \in \{q_0, q_1, \cdots\}$, 因为有$q_{i-1}q_i = q_i, i = 1, 2, \cdots$, 所以还可以假定上述每个等式中 q 的下标是递减的(可以相等). 设在上述等式组中出现的 q 的最大下标为 k, 用 q_{k+1} 右乘以上各式, 可得

$$uq_{k+1} = r_1 q_{k+1} = u_1 q_{k+1} = r_2 q_{k+1} = \cdots = r_{n'} q_{k+1} = vq_{k+1}.$$

显然有 $1\sigma q_{k+1}$, 所以 $q_{k+1}\lambda 1$. 因此由命题 1.2 知 S/λ 是强平坦的.

由条件知 S/λ 是投射的, 所以存在 $e \in E(S)$, 使得 $Se \simeq S/\lambda$. 设 $\beta: Se \to S/\lambda$ 是同构, $\beta(e) = \bar{r}, \beta(r'e) = \bar{1}, r, r' \in S$, 则 $rr'e = r\beta^{-1}(\bar{1}) = \beta^{-1}(\bar{r}) = e$, 所以 $r'err'er = r'er \in E(S)$. 令 $f = r'er$, 作映射 $\varphi: S/\lambda \to Sf$ 为 $\varphi(\bar{s}) = sf$. 若 $\bar{s} = \bar{t}$, 则 $sr'er = s\beta^{-1}(\bar{1})r = \beta^{-1}(\bar{s})r = \beta^{-1}(\bar{t})r = t\beta^{-1}(\bar{1})r = tr'er$, 所以 φ是映射. 若 $sf = tf$, 则 $\bar{s} = s\bar{1} = s\beta(r'e) = sr'e\beta(e) = sr'e\bar{r} = \overline{sr'er} = \overline{sf} = \overline{tf} = t\bar{f} = tr'e\bar{r} = tr'e\beta(e) = t\beta(r'e) = t\bar{1} = \bar{t}$. 所以 φ是单同态, 从而 $\varphi: S/\lambda \to Sf$ 是同构, 且 $\varphi(\bar{1}) = f$.

对任意 $i = 0, 1, \cdots, q_i\lambda 1$, 所以$\overline{q_i} = \bar{1}$, 因此

$$f = \varphi(\bar{1}) = \varphi(\overline{q_i}) = q_i f.$$

又因为 $\varphi(\bar{f}) = \varphi(f\bar{1}) = f\varphi(\bar{1}) = ff = f = \varphi(\bar{1})$, 所以 $\bar{f} = \bar{1}$. 从而 $f\lambda 1$. 同前面的证明类似地可知存在 q_m, 使得 $fq_m = 1 \cdot q_m = q_m$. 所以对于 $i = 0, 1, \cdots$,

$$q_i q_m = q_i(fq_m) = (q_i f)q_m = fq_m = q_m,$$

即 S 满足条件(FP_1).

设 $E(S)$ 的子集合 M 具有以下性质:对任意 $e_1,\cdots,e_n,f_1,\cdots,f_m\in M$,存在 $f\in M$ 满足 $e_1\cdots e_nf=f_1\cdots f_mf$. 记 Q 为由 $M\cup\{1\}$ 生成的 S 的子半群. 在 S 上定义关系 σ 如下:

$$s\sigma t\Leftrightarrow \text{存在 } p,q\in Q,r\in S,\text{使得 } s=rp,t=rq.$$

记 λ 为 σ 的传递包,则 λ 是 S 上的左同余. 下面证明 S/λ 是强平坦系.

设 $u,v\in S$ 满足 $u\lambda v$,则存在 $u_1,\cdots,u_{n-1}\in S$,使得 $u=u_0\sigma u_1\sigma\cdots\sigma u_{n-1}\sigma u_n=v$. 对于 $u_0\sigma u_1$,存在 $p,q\in Q,r\in S$,使得 $u_0=rp,u_1=rq$. 所以 $u_0=re_1\cdots e_l,u_1=rf_1\cdots f_m$,这里 $e_1,\cdots,e_l,f_1,\cdots,f_m\in M,m,l\geqslant 0$. 由 M 的性质可知存在 $g_1\in M$,使得 $e_1\cdots e_lg_1=f_1\cdots f_mg_1$. 所以

$$u_0g_1=re_1\cdots e_lg_1=rf_1\cdots f_mg_1=u_1g_1,$$
$$\sigma u_2g_1\sigma\cdots\sigma u_{n-1}g_1\sigma u_ng_1,$$

这里利用了事实:$s\sigma t,g\in Q\Rightarrow sg\sigma tg$.

对于 $u_1g_1\sigma u_2g_1$,类似于上面的讨论可知存在 $g_2\in M$,使得

$$u_0g_1g_2=u_1g_1g_2=u_2g_1g_2\sigma u_3g_1g_2\sigma\cdots\sigma u_ng_1g_2.$$

继续上述过程可知存在 $g_1,g_2,\cdots,g_n\in M$,使得

$$u_0g_1g_2\cdots g_n=u_ng_1g_2\cdots g_n,$$

即 $ug_1\cdots g_n=vg_1\cdots g_n$. 又由 λ 的定义容易证明 $g_1\cdots g_n\lambda 1$,所以由命题 1.2 知 S/λ 是强平坦的.

由条件知 S/λ 是投射的,所以类似于前面的证明可知存在 $e\in E(S)$,使得 $\alpha:S/\lambda\to Se$ 是 S-同构且 $\alpha(\bar{1})=e$. 因为 $\alpha(\bar{e})=e\alpha(\bar{1})=ee=e=\alpha(\bar{1})$,所以 $\bar{e}=\bar{1}$. 因此对任意 $f\in M$,有

$$e=\alpha(\bar{1})=\alpha(\bar{f})=f\alpha(\bar{1})=fe.$$

由 $e\lambda 1$ 可知存在 $u_1,\cdots,u_{n-1}\in S$,使得 $e=u_0\sigma u_1\sigma\cdots\sigma u_{n-1}\sigma u_n=1$. 类似于前面的证明可知存在 $g_1,\cdots,g_n\in M$,使得 $eg_1\cdots g_n=g_1\cdots g_n$. 所以对任意 $f\in M$,

$$fg_1\cdots g_n=f(eg_1\cdots g_n)=(fe)g_1\cdots g_n$$
$$=eg_1\cdots g_n=g_1\cdots g_n.$$

这说明$g_1\cdots g_n\in\langle M\rangle$是$\langle M\rangle$中的右零元. 所以$S$满足条件($FP_2$).

//

在$E(S)$中规定如下的序:

$$e\leqslant f\Leftrightarrow e=ef=fe.$$

这个序称为S中幂等元的自然序.

由定理 9.1 可得:

推论 9.2 设所有循环强平坦S-系是投射的,则S中不包含幂等元对应于自然序的无限降链.

证明 由条件(FP_1)立得. //

推论 9.3 所有有限生成的强平坦S-系是投射的当且仅当所有循环的强平坦S-系是投射的.

证明 由命题 4.2.7 即得. //

推论 9.4 对于幺半群S,以下三条等价:

(1) 所有循环的强平坦系是自由的;

(2) 所有有限生成的强平坦系是自由的;

(3) S满足(FP_1),(FP_2),且对任意$e\in E(S)$,有$e\mathscr{D}1$.

证明 由定理 8.20 和定理 9.1 即得. //

定理 9.5 对于幺半群S,以下条件等价:

(1) 所有循环S-系是投射的;

(2) 所有循环S-系是强平坦的;

(3) 所有循环的挠自由S-系是投射的;

(4) 所有循环的挠自由S-系是强平坦的;

(5) $S=\{1\}$或$S=\{1,0\}$.

证明 由定理 8.25 和定理 9.1 即得. //

下面我们把利用循环系的性质对幺半群进行同调分类的有关结果也汇总成一个表. 该表选自[26].

所有循环的…S系 \ 是(满足)	自由	投射	强平坦	条件(P)	平坦	弱平坦	挠自由
投射	$\forall e=e^2$ $e\mathscr{D}1$ (8.20)						
强平坦	$e\mathscr{D}1$ $(FP_1),(FP_2)$ (9.4)	$(FP_1),(FP_2)$ (9.1)					
条件(P)	$\{1\}$ (8.21)	$\forall x$ 是周期元 $(FP_1),(FP_2)$ (1.5),(9.1)	$\forall x\in S$ x 是周期元 (1.5)				
平坦	$\{1\}$	左谐零 (6.8)	左谐零	?)			
弱平坦	$\{1\}$	左谐零	左谐零	?	?		
挠自由	$\{1\}$	$\{1\}\vee\{1,0\}$ (9.5)	$\{1\}\vee\{1,0\}$	?	?	?	
所有	$\{1\}$	$\{1\}\vee\{1,0\}$	$\{1\}\vee\{1,0\}$	$G\vee G^0$ (8.26)	?	正则且… (5.12)	左可消元是左可逆元 (5.13)

§10 条件(E)与正则幺半群

本节讨论条件(E)对幺半群的刻画问题,特别地利用条件(E)给出了正则幺半群的 S- 系范畴特征. 其主要结果选自于[108].

我们知道,环 R 是正则的当且仅当所有左 R- 模是平坦的. 但下面的定理表明,对于幺半群,类似的结果不成立. 只能证明幺半群 S 是正则的当且仅当所有满足条件(E)的左 S- 系是平坦的. 为此先有:

命题 10.1 设 I 是 S 的真左理想,则以下几条是等价的:

(1) $A(I)$ 是平坦的;

(2) $A(I)$ 是弱平坦的;

(3) $A(I)$ 是主弱平坦的;

(4) 对任意 $a \in I, a \in aI$.

证明 由命题 5.2.2 的证明即得. 实际上,(1) 和(4) 等价就是命题 5.2.2. //

定理 10.2 对于幺半群,以下几条等价:

(1) 所有满足条件(E) 的 S- 系是平坦的;

(2) 所有满足条件(E) 的 S- 系是弱平坦的;

(3) 所有满足条件(E) 的 S- 系是主弱平坦的;

(4) S 是正则幺半群.

证明 (1)⇒(2)⇒(3) 是显然的.

(3)⇒(4) 设 $x \in S$. 如果 $Sx = S$,则 x 是左可逆元,所以是正则元. 设 $Sx \neq S$,则 Sx 是 S 的真左理想. 由命题 5.2.1 知 $A(Sx)$ 满足条件(E),因此由条件知 $A(Sx)$ 是主弱平坦 S- 系. 由命题 10.1 知对任意 $y \in Sx$,有 $y \in ySx$. 特别地 $x \in xSx$,即 x 是正则元. 所以 S 是正则幺半群.

(4)⇒(1) 设 B 是任意满足条件(E) 的左 S- 系. 要证明 B 是平坦的.

设 A 是右 S- 系, $a, a' \in A, b, b' \in B$, 在 $A \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$,则存在 $a_1, \cdots, a_n \in A, b_2, \cdots, b_n \in B, s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$,使得

$$
\begin{aligned}
&a = a_1 s_1, \\
&a_1 t_1 = a_2 s_2, \qquad && s_1 b = t_1 b_2, \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots \\
&a_n t_n = a', && s_n b_n = t_n b'.
\end{aligned}
$$

下面对 n 用数学归纳法证明在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$.

设 $n = 1$,此时有

$$
\begin{aligned}
&a = a_1 s_1, \\
&a_1 t_1 = a', \qquad && s_1 b = t_1 b'.
\end{aligned}
$$

由条件知 s_1 是正则元,所以存在 $s_1' \in S$,使得 $s_1 = s_1 s_1' s_1$. 因此 $t_1 b' = s_1 b = s_1 s_1' s_1 b = s_1 s_1' t_1 b'$. 由于 B 满足条件(E),所以存在 $u \in S$, $b'' \in B$,使得

$$t_1u = s_1s_1{}'t_1u, b' = ub''.$$

因此，$as_1{}'t_1u = a_1s_1s_1{}'t_1u = a_1t_1u = a'u$. 所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有

$$\begin{aligned} a \otimes b &= a_1s_1 \otimes b = a_1s_1s_1{}'s_1 \otimes b = a_1s_1s_1{}' \otimes s_1b \\ &= as_1{}' \otimes s_1b = as_1{}' \otimes t_1b' = as_1{}' \otimes t_1ub'' \\ &= as_1{}'t_1u \otimes b'' = a'u \otimes b'' = a' \otimes ub'' \\ &= a' \otimes b'. \end{aligned}$$

设 $n \geqslant 2$. 由条件知存在 $s_1{}', t_1{}' \in S$，使得 $s_1 = s_1s_1{}'s_1, t_1 = t_1t_1{}'t_1$. 因此由 $s_1b = t_1b_2$ 可得

$$\begin{aligned} t_1b_2 &= s_1b = s_1s_1{}'s_1b = s_1s_1{}'t_1b_2, \\ s_1b &= t_1b_2 = t_1t_1{}'t_1b_2 = t_1t_1{}'s_1b. \end{aligned}$$

由于 B 满足条件(E)，所以存在 $u, v \in S, c, c' \in B$，使得

$$\begin{aligned} t_1u &= s_1s_1{}'t_1u, \qquad b_2 = uc, \\ s_1v &= t_1t_1{}'s_1v, \qquad b = vc'. \end{aligned}$$

因此 $s_1vc' = s_1b = t_1b_2 = t_1uc$. 所以有如下的等式组：

$$\begin{array}{ll} av = a_1s_1v, & \\ \boxed{a_1t_1u = a_2s_2u,} & s_1vc' = t_1uc, \\ a_2t_2 = a_3s_3, & s_2uc = t_2b_3, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_nt_n = a', & s_nb_n = t_nb'. \end{array}$$

对于框线以内的等式组，由归纳假定可知在$(a_1t_1uS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a_1t_1u \otimes c = a' \otimes b'$. 又因为

$$a_1t_1u = a_1s_1s_1{}'t_1u = as_1{}'t_1u \in aS,$$

所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a_1t_1u \otimes c = a' \otimes b'$.

对前两行等式组利用归纳假定可知，在$(avS \cup a_2s_2uS) \otimes B$ 中有 $av \otimes c' = a_2s_2u \otimes c$. 所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有

$$\begin{aligned} a \otimes b &= a \otimes vc' = av \otimes c' = a_2s_2u \otimes c = a_1t_1u \otimes c \\ &= a' \otimes b'. \end{aligned}$$

因此由数学归纳法原理即知 B 是平坦 S- 系. //

定理 10.3 对于幺半群 S,以下几条等价:

(1) 所有满足条件(E) 的 S- 系满足条件(P);

(2) 所有满足条件(E) 的 S- 系是强平坦的;

(3) 所有满足条件(E) 的 S- 系是投射的;

(4) 所有满足条件(E) 的 S- 系是自由的;

(5) S 是群.

证明 (4)⇒(3)⇒(2)⇒(1) 是显然的.

(1)⇒(5) 由命题 5.2.1 即得.

(5)⇒(4) 设 S 是群,则容易证明所有 S- 系都是循环子系的不交并.若 A 是满足条件(E) 的循环 S- 系,则 $A \simeq S$.因此所有满足条件(E) 的 S- 系都是自由的. //

下面的结果已出现在定理 4.5.13 中,为了本节的完善,仍将其列出.

定理 10.4 对于幺半群 S,以下两条等价:

(1) 所有满足条件(E) 的 S- 系是挠自由的;

(2) S 中的左可消元是左可逆元.

定理 10.2 完全刻画了所有满足条件(E) 的 S- 系是平坦系的幺半群.由定理 4.3.16 及例 4.3.18 知平坦系可以不满足条件(E).因此平坦性与条件(E) 是两个不能比较的性质.如何刻画所有平坦系都满足条件(E) 的幺半群,至今仍是一个没有解决的问题.

§11 左完全幺半群

本节讨论所有强平坦左 S- 系都是投射系的幺半群,称之为左完全幺半群.本节主要结果选自[112].

类似于左完全环的定义(Bass,1960),自然地可以把使得所有平坦左 S- 系都是投射系的幺半群 S 定义为左完全幺半群.但是,由定理 5.2.8 可知,如果所有平坦左 S- 系都是强平坦的,则 $S =$

{1}. 因此上述意义下的左完全幺半群只能是平凡的. 所以只能采取另外的方式定义左完全幺半群.

定义 11.1 称 S 是左完全幺半群,如果所有强平坦左 S- 系都是投射的.

关于左完全幺半群,在[145]和[71]中已有大量的讨论. 例如[45]中证明了若 S 是左完全幺半群,则 S 的主右理想满足降链条件.

在环理论中,有著名的 Bjórk 定理:设 R 是环,若右 R- 模 M 关于循环子模满足降链条件,则 M 关于有限生成子模满足降链条件. 对于幺半群,有类似的结果:

定理 11.2 设右 S- 系 A 关于循环子系满足降链条件,则 A 关于有限生成子系满足降链条件.

证明 令

$$\mathscr{A} = \{B \leqslant A \mid B \text{ 关于有限生成子系满足降链条件}\}.$$

由条件可知,A 的所有循环子系中一定有极小的,设其为 B_0. 显然,$B_0 \in \mathscr{A}$,故 $\mathscr{A} \neq \varnothing$. 设 $\mathscr{A}$ 中有升链:$B_1 \leqslant B_2 \leqslant \cdots$. 令 $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. 下证 $B \in \mathscr{A}$. 设 C 是 B 的有限生成子系,则存在 B_i,使得 $C \leqslant B_i$,设

$$C_1 \geqslant C_2 \geqslant \cdots \tag{1}$$

是 B 中的有限生成子系的降链,则它也是某个 B_i 的有限生成子系的降链. 由于 $B_i \in \mathscr{A}$,所以(1) 是稳定的. 即 B 关于有限生成子系满足降链条件,从而 $B \in \mathscr{A}$.

因此,由 Zorn 引理,$\mathscr{A}$ 中有极大元,设其为 B. 若 $B = A$,则证明完成,下设 $B \neq A$.

因为 $B \neq A$,所以存在 $a \in A$,使得 $aS \nsubseteq B$. 由条件可取 $a_0 \in A$,使得 $a_0S \nsubseteq B$ 且 a_0S 是具此性质的循环子系中的极小者. 令 $M = B \cup a_0S$. 下证 $M \in \mathscr{A}$,从而与 B 在 $\mathscr{A}$ 中的极大性发生矛盾.

设 M 中有有限生成子系的降链

$$M_1 \geqslant M_2 \geqslant \cdots \geqslant M_n \geqslant \cdots, \tag{2}$$

如果 $M_n \leqslant B$，则关于任意 $t \geqslant n$，$M_t \leqslant B$. 故降链(2) 是稳定的. 因此假定对于任意自然数 n，$M_n \nsubseteq B$. 用数学归纳法证明下述事实：

$$M_n = B_n \cup a_0S, B_n \text{ 是有限生成的，且}$$
$$B_{n+1} \leqslant B_n \leqslant B, \quad n = 1,2,\cdots. \tag{3}$$

设 $n = 1$，假定 $u_1,\cdots,u_m$ 是 M_1 的生成元. 设 $u_j \notin B$，则 $u_j \in a_0S$，从而 $u_jS \subseteq a_0S$. 又 $u_jS \nsubseteq B$，所以由 a_0S 的极小性可知 $u_jS = a_0S$. 所以有

$$M_1 = \bigcup_{j=1}^{m} u_jS = (\bigcup_{u_j \in B} u_jS) \cup (\bigcup_{u_j \notin B} u_jS)$$
$$= B_1 \cup (\bigcup_{u_j \notin B} u_jS) = B_1 \cup a_0S,$$

这里 $B_1 = \bigcup_{u_j \in B} u_jS \subseteq B$ 是有限生成的.

设 $n > 1$. 假定 $u_1,\cdots,u_m$ 是 M_n 的生成元. 因为 $M_n \leqslant M_{n-1} = B_{n-1} \cup a_0S$，所以 $u_j \in B_{n-1}$，或者 $u_j \in a_0S$，$j = 1,2,\cdots,m$. 令 $\triangle = \{j | u_j \in B_{n-1}\}$，$\triangle' = \{1,\cdots,m\} - \triangle$，再令 $B_n = \bigcup_{j\in\triangle} u_jS$，则 $B_n \leqslant B_{n-1}$ 且是有限生成的. 对于 $j \in \triangle'$，$u_j \notin B_{n-1}$，所以 $u_j \in a_0S$，故 $u_jS \subseteq a_0S$. 又存在 j 使得 $u_jS \nsubseteq B$(否则，所有的 $u_j \in B$，从而 $M_n \leqslant B$，矛盾). 利用 a_0S 的极小性可知 $u_jS = a_0S$. 所以 $M_n = B_n \cup (\bigcup_{j\in\triangle'} u_jS) = B_n \cup a_0S$.

所以事实(3) 成立. 因此得到了 B 的有限生成子系的降链 $B_1 \geqslant B_2 \geqslant \cdots \geqslant B_n \geqslant \cdots$. 因为 $B \in \mathscr{A}$，故存在 n 使得 $B_n = B_{n+k}$，$k \geqslant 0$. 所以 $M_{n+k} = B_{n+k} \cup a_0S = B_n \cup a_0S = M_n$，$k \geqslant 0$. 这说明降链(2) 是稳定的. 故 $M \in \mathscr{A}$. //

对于左完全幺半群有

定理 11.3 设 S 是左完全幺半群，A 是任意右 S-系，则 A 关于有限生成子系满足降链条件.

证明 设 S 是左完全幺半群，则 S 关于主右理想满足降链条件. 设 A 是右 S-系，$a,b \in A$. 若 $aS \subseteq bS$，则存在 $s \in S$，使得 $aS = bsS$. 因此 A 中的任意循环子系的降链具有如下形式：

$$aS \geqslant as_1S \geqslant as_1s_2S \geqslant \cdots. \tag{4}$$

考虑 S 中的如下降链：

$$S \geqslant s_1S \geqslant s_1s_2S \geqslant \cdots,$$

它是稳定的，所以降链(4) 也是稳定的. 即 A 关于循环子系满足降链条件. 由定理 11.2 即得结论. //

设 S 是左完全幺半群，A 是左 S-系，为了研究 A 关于子系的升链条件，从下述构造开始.

设 $n_1,\cdots,n_k,\cdots$ 都是自然数，令 $\Gamma_k=\{1,\cdots,n_k\}$，设 α_k 是从 Γ_k 到 Γ_{k+1} 的映射，关于任意 k 和任意 $j\in\Gamma_k$，取定 S 中的元素 w_{jk}，以符号 $x_{11},x_{21},\cdots,x_{n_11},x_{12},x_{22},\cdots,x_{n_22},\cdots$ 为基作自由左 S-系 F. 令

$$H=\{(x_{ik},w_{ik}x_{\alpha_k(i),k+1})\mid i\in\Gamma_k,k=1,2,\cdots\},$$

设 ρ 是由 H 生成的 F 上的同余. 记 $G=F/\rho$.

引理11.4 设 $s,t\in S$，ρ 如前面的定义. 若 $sx_{ik}\rho tx_{jl}$，则存在自然数 h,p,q，使得

$$sw_{ik}w_{i_1,k+1}\cdots w_{i_p,h}=tw_{jl}w_{j_1,l+1}\cdots w_{j_q,h},$$

这里 $k+p=h=l+q$，$i_1=\alpha_k(i)$，$i_2=\alpha_{k+1}(i_1)$，$\cdots$，$i_p=\alpha_{h-1}(i_{p-1})$，$j_1=\alpha_l(j)$，$j_2=\alpha_{l+1}(j_1)$，$\cdots$，$j_q=\alpha_{h-1}(j_{q-1})$，且 $\alpha_h(i_p)=\alpha_h(j_q)$.

证明 由 $sx_{ik}\rho tx_{jl}$ 知 $sx_{ik}=tx_{jl}$ 或者存在 $t_1,\cdots,t_m\in S$，$(c_1,d_1),\cdots,(c_m,d_m)\in H\cup H^{-1}$，使得

$$sx_{ik}=t_1c_1,t_1d_1=t_2c_2,\cdots,t_md_m=tx_{jl}. \tag{5}$$

若 $sx_{ik}=tx_{jl}$，则结论自然成立. 以下假定 $sx_{ik}\neq tx_{jl}$.

为了方便，称等式 $t_pd_p=t_{p+1}c_{p+1}$ 中出现的基 x_{uv} 的第二下标 v 为此等式的第二下标.

若 $m=1$，则(5) 变为

$$sx_{ik}=t_1c_1,\quad t_1d_1=tx_{jl}. \tag{6}$$

不妨假定 $k\leqslant l$. 此时 $c_1=x_{ik}$ 或者 $c_1=w_{i',k+1}x_{ik}$，对应地 $d_1=w_{ik}x_{\alpha_k(i),k+1}$，或者 $d_1=x_{i',k-1}$，这里 i' 满足 $\alpha_{k-1}(i')=i$. 若后者成立，则 $l=k-1$，矛盾. 所以 $c_1=x_{ik}$，$d_1=w_{ik}x_{\alpha_k(i),k+1}$. 因此由(6) 知 $s=t_1$，$t_1w_{ik}=t$，$k+1=l$，$j=\alpha_k(i)$. 所以 $sw_{ik}=t$，因此

$sw_{ik}w_{i_1,k+1} = tw_{i_1,k+1} = tw_{jl}$. 结论成立.

设 $m > 1$. 设在(5) 中有如下的一段等式组:

$$t_p d_p = t_{p+1} c_{p+1}, \cdots, t_{p+q} d_{p+q} = t_{p+q+1} c_{p+q+1},$$
$$\cdots, t_{p+2q} d_{p+2q} = t_{p+2q+1} c_{p+2q+1}, \tag{7}$$

其中每个等式的第二下标依次是

$$h, h-1, \cdots, h-q+1, h-q, h-q+1, \cdots, h-1, h.$$

对 q 用数学归纳法容易证明,等式组(7) 可用如下的等式来代替:

$$t_p d_p = t_{p+2q+1} c_{p+2q+1}. \tag{8}$$

设等式组(5) 中所有等式的第二下标中最大者为 h,假定(5) 中有如下的两个等式:

$$t_p d_p = t_{p+1} c_{p+1}, t_q d_q = t_{q+1} c_{q+1}, \tag{9}$$

其第二下标均达到 h,且这两个等式中间再没有第二下标达到 h 的等式. 不妨设 $p < q$. 因为(5) 中各等式的第二下标的变化规律是增加 1 或减少 1,所以(5) 中位于(9) 中两个等式中间的所有等式的第二下标均小于 h,并且其变化规律是从 h 开始依次递减到某一程度后再依次递增,以及此规律的若干次复合. 应用结论(8) 可知 $t_p d_p = t_{q+1} c_{q+1}$. 因此可以假定第二下标达到 h 的等式只有一个:

$$t_p d_p = t_{p+1} c_{p+1}. \tag{10}$$

考虑(1) 中从 $sx_{ik} = t_1 c_1$ 到(10) 的这一段. 应用结论(8) 将具有(7) 形式的等式组简化,可以假定该段为

$$sx_{ik} = t_1 x_{ik},$$
$$t_1 w_{ik} x_{i_1,k+1} = t_2 x_{i_1,k+1},$$
$$\cdots\cdots$$
$$t_{p-1} w_{i_{p-2},k+p-2} x_{i_{p-1},k+p-1} = t_p x_{i_{p-1},k+p-1},$$
$$t_p w_{i_{p-1},k+p-1} x_{i_p,k+p} = t_{p+1} w_{u,k+p-1} x_{i_p,k+p},$$

这里 $k + p = h, i_1 = \alpha_k(i), \cdots, i_{p-1} = \alpha_{k+p-2}(i_{p-2}), i_p = \alpha_{k+p-1}(i_{p-1}) = \alpha_{k+p-1}(u)$,所以有

$$t_{p+1} w_{u,k+p-1} = t_p w_{i_{p-1},k+p-1}$$
$$= t_{p-1} w_{i_{p-2},k+p-2} w_{i_{p-1},k+p-1}$$

$$= \cdots$$

$$= t_1 w_{ik} w_{i_1,k+1} \cdots w_{i_{p-1},k+p-1}$$

$$= s w_{ik} w_{i_1,k+1} \cdots w_{i_{p-1},k+p-1}. \tag{11}$$

考虑(5) 中从(10) 到 $t_m d_m = t x_{jl}$ 这一段. 类似于前一段的讨论可知

$$t_p w_{i_{p-1},k+p-1} = t w_{jl} w_{j_1,l+1} \cdots w_{j_{q-1},l+q-1}, \tag{12}$$

这里 $l + q = h, j_1 = \alpha_l(j), \cdots, j_{q-1} = \alpha_{l+q-2}(j_{q-2}) = u, \alpha_{l+q-1}(j_{q-1}) = \alpha_{l+q-1}(i_{p-1})$. 所以由(11), (12) 和 $t_p w_{i_{p-1},k+p-1} = t_{p+1} w_{u,k+p-1}$ 得

$$s w_{ik} w_{i_1,k+1} \cdots w_{i_{p-1},k+p-1} = t w_{jl} w_{j_1,l+1} \cdots w_{j_{q-1},l+q-1}.$$

引理证毕. //

引理 11.5 $G = F/\rho$ 是强平坦左 S- 系.

证明 设 $s, t \in S, x_{ik}, x_{jl} \in F$, 使得 $s\overline{x_{ik}} = t\overline{x_{jl}}$, 则 $s x_{ik} \rho t x_{jl}$. 由引理 11.4 知有如下等式:

$$s w_{ik} \cdots w_{i_p,h} = t w_{jl} \cdots w_{j_q,h}, \alpha_h(i_p) = \alpha_h(j_q).$$

令 $u = w_{ik} \cdots w_{i_p,h}, v = w_{jl} \cdots w_{j_q,h}$, 则 $su = tv$, 且

$$\begin{aligned} \overline{x_{ik}} &= \overline{w_{ik} x_{i_1,k+1}} = w_{ik}\, \overline{x_{i_1,k+1}} = \cdots \\ &= w_{ik} w_{i_1,k+1} \cdots w_{i_p,h}\, \overline{x_{\alpha_h(i_p),h+1}} \\ &= u\, \overline{x_{\alpha_h(i_p),h+1}}, \\ \overline{x_{jl}} &= \overline{w_{jl} x_{j_1,l+1}} = w_{jl}\, \overline{x_{j_1,l+1}} = \cdots \\ &= w_{jl} w_{j_1,l+1} \cdots w_{j_q,h}\, \overline{x_{\alpha_h(j_q),h+1}} \\ &= v\, \overline{x_{\alpha_h(j_q),h+1}}. \end{aligned}$$

这说明 G 满足条件(P). 同理可证 G 满足条件(E). 所以 G 是强平坦左 S- 系. //

引理 11.6 设有自然数 n 使得 $n_k \leqslant n, k = 1, 2, \cdots$, 如果 G 是投射的, 则 G 是有限生成的.

证明 设 $G \simeq \coprod_{i \in I} Se_i, e_i \in E(S), i \in I$. 为了方便, 假定 $G =$

$\coprod_{i\in I} Se_i$，对于 $k=2,3,\cdots$，令 $\triangle_k=\Gamma_k-\mathrm{Im}\alpha_{k-1}$. 设 $\triangle_k\neq\varnothing$. 对于 $j\in\triangle_k$，称 j 是可连接的，如果存在 $i\in\mathrm{Im}\alpha_{k-1}$，使得

$$\overline{x_{jk}}=w_{jk}w_{j_1,k+1}\cdots w_{j_q,k+q}\,\overline{x_{v,k+q+1}},$$

$$\overline{x_{ik}}=w_{ik}w_{i_1,k+1}\cdots w_{i_q,k+q}\,\overline{x_{v,k+q+1}},$$

这里 $j_1,\cdots,j_q,i_1,\cdots,i_q$ 的定义同前，$v=\alpha_{k+q}(j_q)=\alpha_{k+q}(i_q)$. 记 $\triangle''_k=\{j\in\triangle_k \mid j$ 是可连接的$\}$，$\triangle'_k=\triangle_k-\triangle''_k$，$\triangle=\bigcup_{k=2}^{\infty}\triangle'_k$. 断言

$$|\triangle|<\infty. \tag{13}$$

假若不然，则对于任意自然数 m，$|\triangle|\geqslant m$. 设 $j_1\in\triangle'_{k_1},\cdots,j_m\in\triangle'_{k_m}$. 注意到每个 $\triangle'_k$ 若非空，则必有限，故还可以假定 $k_1<k_2<\cdots<k_m$. 令 $k_0=k_m+1$. 对任意的 $i=1,2,\cdots,m$，有

$$\begin{aligned}\overline{x_{j_i,k_i}}&=w_{j_i,k_i}\,\overline{x_{j_i(1),k_i+1}}=\cdots\\&=w_{j_i,k_i}w_{j_i(1),k_i+1}\cdots w_{j_i(u_i),k_i+u_i}\,\overline{x_{j_i(u_i+1),k_i+u_i+1}},\end{aligned} \tag{14}$$

这里 $j_i(1)=\alpha_{k_i}(j_i),\cdots,j_i(u_i+1)=\alpha_{k_i+u_i}(j_i(u_i))$，并且 $k_i+u_i+1=k_0$，$i=1,\cdots,m$.

显然可以取 $m>n$. 因为 $j_1(u_1+1),\cdots,j_m(u_m+1)\in\Gamma_{k_0}$，而 $|\Gamma_{k_0}|\leqslant n$，所以上述 m 个自然数中至少有某两个相等. 不妨设 $j_1(u_1+1)=j_2(u_2+1)$. 因为 $k_1<k_2$，所以有

$$\begin{aligned}\overline{x_{j_1k_1}}&=w_{j_1k_1}\,\overline{x_{j_1(1),k_1+1}}=\cdots\\&=w_{j_1k_1}w_{j_1(1),k_1+1}\cdots w_{j_1(v),k_2-1}\,\overline{x_{j_1(v+1),k_2}},\end{aligned}$$

这里 $j_1(v+1)=\alpha_{k_2-1}(j_1(v))\in\mathrm{Im}\alpha_{k_2-1}$，记 $u=j_1(v+1)$，则由 (14) 有

$$\overline{x_{u,k_2}}=w_{j_1(v+1),k_2}w_{j_1(v+2),k_2+1}\cdots w_{j_1(u_1),k_1+u_1}\,\overline{x_{j_1(u_1+1),k_0}},$$

$$\overline{x_{j_2,k_2}}=w_{j_2,k_2}w_{j_2(1),k_2+1}\cdots w_{j_2(u_2),k_2+u_2}\,\overline{x_{j_2(u_2+1),k_0}}.$$

所以 j_2 是可连接的. 因此 $j_2\in\triangle''_{k_2}$. 这与 $j_2\in\triangle'_{k_2}$ 矛盾. 这样就证明了断言(13) 是成立的.

因此存在自然数 k_0，使得当 $l>k_0$ 时，$\triangle'_l=\varnothing$. 对于 k_0，存在

I 的有限子集合 I_0，使得

$$\bigcup_{k=1}^{k_0}\bigcup_{i\in\Gamma_k} S\,\overline{x_{ik}} \leqslant \coprod_{i\in I_0} Se_i.$$

记 $E=\coprod_{i\in I_0} Se_i$. 对于 l 和 $j\in\Gamma_l$，考虑如下两种情形：

(i) $l\leqslant k_0$. 这时 $\overline{x_{jl}}\in E$.

(ii) $l>k_0$. 此时 $\Gamma_l=\triangle''_l\cup \mathrm{Im}\alpha_{l-1}$. 设 $l=k_0+l'$. 对 l' 应用数学归纳法和可连接的概念容易证明 $\overline{x_{jl}}\in E$. 所以有

$$\coprod_{i\in I_0} Se_i\subseteq G=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i\in\Gamma_k} S\,\overline{x_{ik}}\subseteq E=\coprod_{i\in I_0} Se_i.$$

这说明 I 是有限集合. 因此 G 是有限生成的. //

定理 11.7 设 S 是左完全幺半群，A 是任意左 S-系，n 是自然数，则 A 关于 n-生成（即有一组个数不超过 n 的生成元）的 S-子系满足升链条件.

证明 设 A 是左 S-系，A 中有如下的升链：$A_1\leqslant A_2\leqslant\cdots\leqslant A_k\leqslant\cdots$，其中 $A_k=\bigcup_{i=1}^{n_k}Sa_{ik}$，$a_{ik}\in A$，$n_k\leqslant n$，$k=1,2,\cdots$. 对于任意 $i\in\Gamma_k$，存在 $j\in\Gamma_{k+1}$，使得 $a_{ik}=Sa_{j,k+1}$. 当然这样的 j 不唯一，取定某个 $j\in\Gamma_{k+1}$ 具有上述性质，并定义 $\alpha_k(i)=j$，则 α_k 是从 Γ_k 到 Γ_{k+1} 的映射，$k=1,\cdots$. 对于任意的 k 和 $i\in\Gamma_k$ 以及如上取定的 $j=\alpha_k(i)$，取 $w_{ik}\in S$，使得 $a_{ik}=w_{ik}a_{\alpha_k(i),k+1}$.

对于上述的 n_k，α_k 和 w_{ik}，和前面一样作左 S-系 $G=F/\rho$，由引理 11.5 知 G 是强平坦的. 又因为 S 是左完全幺半群，所以 G 是投射的. 再由引理 11.6 知 G 是有限生成的.

令 $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$，作映射 $f:G\to A$，$f(s\,\overline{x_{ik}})=sa_{ik}$. f 是有定义的. 这是因为：若 $s\,\overline{x_{ik}}=t\,\overline{x_{jl}}$，则由引理 11.4 知有 $sw_{ik}w_{i_1,k+1}\cdots w_{i_p,h}=tw_{jl}w_{j_1,l+1}\cdots w_{j_q,h}$，$\alpha_h(i_p)=\alpha_h(j_q)$. 所以有

$$\begin{aligned}sa_{ik}&=sw_{ik}a_{i_1,k+1}=sw_{ik}w_{i_1,k+1}a_{i_2,k+2}=\cdots\\&=sw_{ik}w_{i_1,k+1}\cdots w_{i_p,h}a_{\alpha_h(i_p),h+1}\end{aligned}$$

$$= tw_{jl}w_{j_1,l+1}\cdots w_{j_q,h}a_{a_h(j_q),h+1}$$

$$= \cdots = tw_{jl}a_{j_1,l+1} = ta_{jl}.$$

显然 f 又是满同态. 所以 A 是有限生成的，因此存在 k_0，使得当 $k \geqslant k_0$ 时，$A_k = A_{k_0}$. //

第六章　特殊幺半群上的平坦系

§1　逆半群

本章考虑几类特殊幺半群(如逆半群，广义逆半群，带，全变换半群等)上的 S- 系的平坦性.

上一章证明了幺半群 S 是正则的当且仅当所有满足条件(E)的 S- 系是平坦的. 对于逆幺半群，有

定理 1.1　逆幺半群是左(右)绝对平坦的.

证明　设 B 是任意 S- 系，要证明 B 是平坦的.

设 A 是右 S- 系，$a,a'\in A,b,b'\in B$，在 $A\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$，则存在 $a_1,\cdots,a_n\in A,b_2,\cdots,b_n\in B,s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$，使得

$$\begin{aligned} a &= a_1s_1, & & \\ a_1t_1 &= a_2s_2, & s_1b &= t_1b_2, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ a_nt_n &= a', & s_nb_n &= t_nb'. \end{aligned}$$

可以假定 n 是偶数(必要时再增加两个等式:$a'\cdot 1=a',1\cdot b'=1\cdot b'$). 令

$$x_0=1,\ x_i=s_1^{-1}t_1s_2^{-1}t_2\cdots s_i^{-1}t_i,\qquad 1\leqslant i\leqslant n,$$

$$y_0=1,\ y_i=t_n^{-1}s_nt_{n-1}^{-1}s_{n-1}\cdots t_{n-i+1}^{-1}s_{n-i+1},\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

这里 x^{-1} 表示 x 的逆元(S 是逆幺半群). 简单的计算可知有

$$x_{n-i}\,y_i^{-1}=x_n,\qquad 0\leqslant i\leqslant n,\tag{1}$$

$$y_ix_{n-i}^{-1}=y_n,\qquad 0\leqslant i\leqslant n.\tag{2}$$

下面用数学归纳法证明对任意 $i\in\{1,\cdots,n\}$，有

$$ax_i = a_i t_i x_i^{-1} x_i. \tag{3}$$

当 $i = 1$ 时，有

$$a_1 t_1 x_1^{-1} x_1 = a_1 t_1 t_1^{-1} s_1 s_1^{-1} t_1 = a_1 s_1 s_1^{-1} t_1 t_1^{-1} t_1$$
$$= a_1 s_1 s_1^{-1} t_1 = ax_1.$$

设 $1 \leqslant k < n$，如下计算：

$$\begin{aligned}
& a_{k+1} t_{k+1} x_{k+1}^{-1} x_{k+1} \\
&= a_{k+1} t_{k+1} t_{k+1}^{-1} s_{k+1} x_k^{-1} x_k s_{k+1}^{-1} t_{k+1} \\
&= a_{k+1} s_{k+1} x_k^{-1} x_k s_{k+1}^{-1} t_{k+1} t_{k+1}^{-1} t_{k+1} \\
&= a_{k+1} s_{k+1} x_k^{-1} x_k s_{k+1}^{-1} t_{k+1} \\
&= a_k t_k x_k^{-1} x_k s_{k+1}^{-1} t_{k+1} \\
&= a x_k s_{k+1}^{-1} t_{k+1} \qquad \text{(归纳假定)} \\
&= a x_{k+1}.
\end{aligned}$$

所以对任意 $i \in \{1,\cdots,n\}$，(3) 式成立. 类似的方法可以证明对任意 $i \in \{1,\cdots,n\}$，有

$$a' y_i = a_{n-i+1} s_{n-i+1} y_i^{-1} y_i. \tag{4}$$

记 $e_i = s_i^{-1} s_i$，$f_i = t_{n-i+1}^{-1} t_{n-i+1}$，$i = 1,2,\cdots,n$. 下面要证明如下的等式组成立：

$$\begin{array}{ll}
ax_0 = ax_0 e_1, & \\
ax_1 = ax_1 e_2, & s_1 b = t_1 b_2, \\
ax_2 = ax_2 e_3, & s_2 b_2 = t_2 b_3, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
ax_{n-1} = ax_{n-1} e_n, & s_{n-1} b_{n-1} = t_{n-1} b_n, \\
ax_n y_0 = ax_n y_0 f_1, & s_n b_n = t_n b', \\
ax_n y_1 = ax_n y_1 f_2, & t_n b' = s_n b_n, \\
ax_n y_2 = ax_n y_2 f_3, & t_{n-1} b_n = s_{n-1} b_{n-1}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
ax_n y_{\frac{n}{2}-1} = ax_n y_{\frac{n}{2}-1} f_{\frac{n}{2}}, & t_{\frac{n}{2}+2} b_{\frac{n}{2}+3} = s_{\frac{n}{2}+2} b_{\frac{n}{2}+2}, \\
ax_n y_{\frac{n}{2}} = a' y_n x_{\frac{n}{2}}, & t_{\frac{n}{2}+1} b_{\frac{n}{2}+2} = s_{\frac{n}{2}+1} b_{\frac{n}{2}+1}, \\
a' y_n x_{\frac{n}{2}-1} e_{\frac{n}{2}} = a' y_n x_{\frac{n}{2}-1}, & t_{\frac{n}{2}} b_{\frac{n}{2}+1} = s_{\frac{n}{2}} b_{\frac{n}{2}},
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a' y_n x_2 e_3 = a' y_n x_2, & t_3 b_4 = s_3 b_3, \\
a' y_n x_1 e_2 = a' y_n x_1, & t_2 b_3 = s_2 b_2, \\
a' y_n x_0 e_1 = a' y_n x_0, & t_1 b_2 = s_1 b, \\
a' y_{n-1} f_n = a' y_{n-1}, & s_1 b = t_1 b_2, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a' y_2 f_3 = a' y_2, & s_{n-2} b_{n-2} = t_{n-2} b_{n-1}, \\
a' y_1 f_2 = a' y_1, & s_{n-1} b_{n-1} = t_{n-1} b_n, \\
a' y_0 f_1 = a' y_0, & s_n b_n = t_n b'.
\end{array}$$

右边等式的成立是显然的.下面只考虑左边的等式组.

当 $i = 0$ 时,$ax_0e_1 = ae_1 = a_1s_1s_1^{-1}s_1 = a_1s_1 = a = ax_0$. 设 $0 < i < n - 1$,则

$$\begin{aligned}
ax_ie_{i+1} &= a_it_ix_i^{-1}x_ie_{i+1} && (\text{由}(3)) \\
&= a_{i+1}s_{i+1}x_i^{-1}x_ie_{i+1} \\
&= a_{i+1}s_{i+1}e_{i+1}x_i^{-1}x_i \\
&= a_{i+1}s_{i+1}x_i^{-1}x_i \\
&= a_it_ix_i^{-1}x_i \\
&= ax_i. && (\text{由}(3))
\end{aligned}$$

对于 $i \in \left\{0,\cdots,\frac{n}{2} - 1\right\}$,如下计算:

$$\begin{aligned}
ax_ny_i &= ax_{n-i}y_i^{-1}y_i && (\text{由}(1)) \\
&= ax_{n-i}f_{i+1}y_i^{-1}y_i \\
&= ax_{n-i}y_i^{-1}y_if_{i+1} \\
&= ax_ny_if_{i+1}, && (\text{由}(1)) \\
ax_ny_{\frac{n}{2}} &= ax_{\frac{n}{2}}y_{\frac{n}{2}}^{-1}y_{\frac{n}{2}} && (\text{由}(1)) \\
&= a_{\frac{n}{2}}t_{\frac{n}{2}}x_{\frac{n}{2}}^{-1}x_{\frac{n}{2}}y_{\frac{n}{2}}^{-1}y_{\frac{n}{2}}. && (\text{由}(3)) \\
&= a_{\frac{n}{2}+1}s_{\frac{n}{2}+1}y_{\frac{n}{2}}^{-1}y_{\frac{n}{2}}x_{\frac{n}{2}}^{-1}x_{\frac{n}{2}} \\
&= a' y_{\frac{n}{2}}x_{\frac{n}{2}}^{-1}x_{\frac{n}{2}} && (\text{由}(4))
\end{aligned}$$

$$=a'y_nx_{\frac{n}{2}}. \qquad (由(2))$$

其余的等式可以用类似的方法证明.

下面要说明前述等式组是“左、右连接”的. 这只要把左边的等式组重新改写一下即可. 例如前一段等式组可以改写为

$$\begin{aligned}
&a = (as_1^{-1})s_1, & & \\
&(as_1^{-1})t_1 = (ax_1s_2^{-1})s_2, & & s_1b = t_1b_2, \\
&(ax_1s_2^{-1})t_2 = (ax_2s_3^{-1})s_3, & & s_2b = t_2b_3, \\
&\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\
&(ax_{n-2}s_{n-1}^{-1})t_{n-1} = (ax_{n-1}s_n^{-1})s_n, & & s_{n-1}b_{n-1} = t_{n-1}b_n.
\end{aligned}$$

其他的等式可类似地改写. 因此在$(aS\cup a'S)\otimes B$中有$a\otimes b=a'\otimes b'$. 所以 B 是平坦S-系.

同理可以证明任意右S-系也是平坦的. //

推论 1.2 完全内射幺半群是左、右绝对平坦的.

证明 由第三章 §6 中的结果及定理 1.1 即得. //

为了考虑群并,需要以下引理.

引理 1.3 左绝对平坦幺半群的同态象仍是左绝对平坦的.

证明 设$f:S\to T$是从S到T上的幺半群同态. 对于任意T-系B,规定S在B上的左作用为

$$s\cdot b=f(s)b,\quad \forall\, s\in S,\forall\, b\in B,$$

则B就是S-系. 同理任意右T-系可以看成是右S-系. 显然$A\underset{S}{\otimes}B=A\underset{T}{\otimes}B$. 所以若$S$是左绝对平坦的,则$T$也是左绝对平坦的. //

定义 1.4 设S是幺半群,F是S的子幺半群. 称F是S的滤子,如果对任意$x,y\in S$,$xy\in F$能推出$x,y\in F$.

引理 1.5 左绝对平坦幺半群的滤子仍是左绝对平坦的.

证明 设F是左绝对平坦幺半群S的滤子,且$F\neq S$,则$S-F$是S的理想. 令$P=S-F$,则由引理 1.3 知 Rees 商S/P是左绝对平坦的. 显然$S/P\simeq F\dot{\cup}\{0\}=F^0$. 设$A$是$F$-系,令$A^0=A\dot{\cup}\{\theta\}$,规定$F^0$在$A^0$上的左作用为:$F\cdot\theta=\{\theta\}$,$0\cdot\theta=\theta$,$0\cdot A=\{\theta\}$,则$A^0$是$F^0$-系. 同理对于任意右$F$-系$B$,可以构造右$F^0$-系

B^0.

设 X 是右 F-系,Y 是左 F-系,$x,x' \in X,y,y' \in Y$,在 $X \underset{F}{\otimes} Y$ 中有 $x \otimes y = x' \otimes y'$,则存在 $x_1,\cdots,x_n \in X,y_2,\cdots,y_n \in Y,s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n \in F$,使得

$$\begin{aligned} &x = x_1 s_1, & & \\ &x_1 t_1 = x_2 s_2, & &s_1 y = t_1 y_2, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ &x_n t_n = x', & &s_n y_n = t_n y'. \end{aligned}$$

显然 $x_1,\cdots,x_n \in X^0,y_2,\cdots,y_n \in Y^0,s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n \in F^0$. 所以在 $X^0 \underset{F^0}{\otimes} Y^0$ 中有 $x \otimes y = x' \otimes y'$. 因为 F^0 是左绝对平坦的,所以在 $(xF^0 \cup x'F^0) \underset{F^0}{\otimes} Y^0$ 中有 $x \otimes y = x' \otimes y'$. 因此设上述等式组中的 $x_1,\cdots,x_n \in xF^0 \cup x'F^0,s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n \in F^0,y_2,\cdots,y_n \in Y^0$. 由 $x = x_1 s_1$ 知 $x_1 \neq \theta,s_1 \neq 0$. 由 $s_1 y = t_1 y_2$ 知 $t_1 \neq 0,y_2 \neq \theta$,再由 $x_1 t_1 = x_2 s_2$ 知 $x_2 \neq \theta,s_2 \neq 0$. 如此继续下去,可知 $x_1,\cdots,x_n \in xF \cup x'F$,$y_2,\cdots,y_n \in Y,s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n \in F$,所以在 $(xF \cup x'F) \underset{F}{\otimes} Y$ 中有 $x \otimes y = x' \otimes y'$. 因此 Y 是平坦 F-系. 即 F 是左绝对平坦的. //

定理 1.6 设幺半群 S 是群并,则 S 是左、右绝对平坦的当且仅当 S 是群的半格.

证明 若 S 是群的半格,则 S 是逆幺半群,所以由定理 1.1 知 S 是左、右绝对平坦的.

反之,设 S 是左、右绝对平坦的. 因为 S 是群并,所以 S 是完全单半群的半格. 设 $S = \dot{\bigcup}_{\alpha \in \Gamma} S_\alpha$,$\Gamma$ 是半格,S_α 是完全单半群. 对于任意 $\beta \in \Gamma$,令

$$S_{[\beta)} = \dot{\bigcup} \{S_\alpha \mid \alpha \in \Gamma, \alpha \geqslant \beta\},$$

则 $S_{[\beta)}$ 是 S 的滤子. 所以由引理 1.5 易知 $S_{[\beta)}$ 是左、右绝对平坦的. 由定理 5.5.5 知 $S_{[\beta)}$,从而 S_β 的任意两个左(右)理想有非空的交. 由于 S_β 是完全单半群,所以 S_β 是群,因此 S 是群的半格. //

设 S 是半群. 称 S 是左(右)绝对平坦的,如果幺半群 S^1 是左

(右) 绝对平坦的.

下面的推论是不证自明的.

推论 1.7 带 B 是左、右绝对平坦的当且仅当 B 是半格.

推论 1.8 完全单半群 S 是左、右绝对平坦的当且仅当 S 是群.

注 1.9 关于定理 1.1 的证明,这里采用了 Bulman-Fleming 和 McDowell 的原始证明,这个证明不依赖于前两章的结果. 如果利用前两章的部分结果的话,可以写出定理 1.1 的很简单的证明:

因为 S 是正则的,且对任意 $x,y\in S$, $z=xx'y=xx'yy'y=yy'xx'y\in xS\cap yS$, $z=xx'y\lambda(x,y)xx'x=x$, 所以由定理 4.5.12 知所有 S- 系是弱平坦的. 又对于任意 $u,v\in E(S)$, $z=uv=vu\in Su\cap Sv$, $z=uv\rho(u,v)v$, 所以由定理 5.3.4 知任意弱平坦 S- 系是平坦的,所以任意 S- 系是平坦的. 同理可以证明任意右 S- 系是平坦的.

§2 本原正则半群

设 S 是半群, $e,f\in E(s)$. 我们知道 $e\leqslant f$ 当且仅当 $e=ef=fe$. 显然若 S 中有零元 0 和幺元 1 时,对任意 $e\in E(S)$ 有 $0\leqslant e\leqslant 1$. 称 $e\in E(S)$ 是本原幂等元,如果 $e\neq 0$,且在序关系 $\leqslant$ 之下, e 是非零幂等元集合中的极小者.

设 S 是带零正则半群,称 S 是本原正则的,如果 S 的任意非零幂等元都是本原的.

定义 2.1 设半群 S 中含有零元 0, $x\in S$. 记

$$\mathrm{ann}_l(x)=\{s\mid s\in S, sx=0\},$$

$$\mathrm{stab}_l(x)=\{s\in S\mid sx=x\}.$$

同理可以定义集合 $\mathrm{ann}_r(x)$ 和 $\mathrm{stab}_r(x)$.

定理 2.2[16] 设 S 是本原正则半群,则以下两条等价:

(1) S^1 是左绝对平坦的;

(2) 对任意 $x,y\in S$,若 $\mathrm{ann}_l(x)=\mathrm{ann}_l(y)$,则 $xS=yS$.

证明 (2)⇒(1) 设 $x,y\in S^1$.若 $x\neq 1$ 且 $x\notin yS$,则 $y\neq 1$,所以 $xS\neq yS$.因此由(2)知存在元素 w,使得 $w\in(\mathrm{ann}_l(x)-\mathrm{ann}_l(y))\cup(\mathrm{ann}_l(y)-\mathrm{ann}_l(x))$.若 $w\in \mathrm{ann}_l(x)-\mathrm{ann}_l(y)$,则由本原正则半群的性质(见[29]第6.5节)可知 $y\in Swy$;若 $w\in \mathrm{ann}_l(y)-\mathrm{ann}_l(x)$,则 $x\in Swx$.当 $y\in Swy$ 时,存在 $u\in S$,使得 $y=uwy$,所以 $uw\in \mathrm{stab}_l(y)\cap \mathrm{ann}_l(x)$.当 $x\in Swx$ 时,存在 $v\in S$,使得 $vwx=x$.所以 $vw\in \mathrm{stab}_l(x)\cap\mathrm{ann}_l(y)$.因此 S^1 具有如下性质:任意 $x,y\in S^1$,或 $x=1$,或 $x\in yS$,或 $(\mathrm{ann}_l(x)\cap \mathrm{stab}_l(y))\cup(\mathrm{ann}_l(y)\cap\mathrm{stab}_l(x))\neq\varnothing$.

设 A 是右 S^1-系,B 是左 S^1-系,$a,a'\in S$,$b,b'\in B$,在 $A\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$,则存在 $a_1,\cdots,a_n\in A$,$b_2,\cdots,b_n\in B$,$s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S^1$,使得

$$\begin{aligned}
&a=a_1s_1, &&\\
&a_1t_1=a_2s_2, && s_1b=t_1b_2,\\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots\\
&a_nt_n=a', && s_nb_n=t_nb'.
\end{aligned}$$

下面对 n 使用数学归纳法证明在 $(aS^1\cup a'S^1)\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$.

设 $n=1$,则有

$$\begin{aligned}
&a=a_1s_1, &&\\
&a_1t_1=a', && s_1b=t_1b'.
\end{aligned}$$

若 $t_1=1$,则 $a_1=a'\in aS^1\cup a'S^1$,所以结论成立.设 $t_1\in s_1S$,则存在 $u\in S$,使得 $t_1=s_1u$.所以对任意 $s_1'\in V(s_1)$,$as_1't_1=a_1s_1s_1's_1u=a_1s_1u=a_1t_1=a'$,因此有

$$\begin{aligned}
&a=(as_1')s_1, &&\\
&(as_1')t_1=a', && s_1b=t_1b'.
\end{aligned}$$

故在 $(aS^1\cup a'S^1)\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$.设 $\mathrm{ann}_l(s_1)\cap\mathrm{stab}_l(t_1)\neq\varnothing$,则存在 $z\in S$,使得 $zs_1=0$,$zt_1=t_1$.因此 $0b=zs_1b=zt_1b'$

$= t_1b' = s_1b$,所以有

$$a = (as_1{}')s_1,$$
$$(as_1{}')0 = (a't_1{}')0, \qquad s_1b = 0b,$$
$$(a't_1{}')t_1 = a', \qquad 0b = t_1b',$$

这里 $s_1{}' \in V(s_1), t_1{}' \in V(t_1)$. 所以在 $(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$. 若 $\mathrm{ann}_l(t_1) \cap \mathrm{stab}_l(s_1) \neq \varnothing$,则可用同样的方法类似地证明.

设 $n > 1$. 如果 $t_1 = 1$,则有

$$a = a_2(s_2s_1),$$
$$a_2t_2 = a_3s_3, \qquad (s_2s_1)b = t_2b_3,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$a_nt_n = a', \qquad s_nb_n = t_nb'.$$

所以由归纳假定知结论成立. 如果 $s_n = 1$,则可采用同上类似的方法证明. 设 $t_1 \in s_1S$,则存在 $u \in S$,使得 $t_1 = s_1u$,所以 $a_1t_1 = a_1s_1u = au$. 对如下等式组使用归纳假定,

$$a = a_1s_1,$$
$$a_1t_1 = au, \qquad s_1b = t_1b_2,$$

可知在 $(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = au \otimes b_2$. 同样对于等式组

$$au = a_2s_2,$$
$$a_2t_2 = a_3s_3, \qquad s_2b_2 = t_2b_3,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$a_nt_n = a', \qquad s_nb_n = t_nb',$$

由归纳假定知在 $(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$ 中有 $au \otimes b_2 = a' \otimes b'$. 所以在 $(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$. 如果 $S_n \in t_nS$,则同上类似的讨论即可完成证明.

设 $(\mathrm{ann}_l(s_1) \cap \mathrm{stab}_l(t_1)) \cup (\mathrm{ann}_l(t_1) \cap \mathrm{stab}_l(s_1)) \neq \varnothing$,且 $(\mathrm{ann}_l(s_n) \cap \mathrm{stab}_l(t_n)) \cup (\mathrm{ann}_l(t_n) \cap \mathrm{stab}_l(s_n)) \neq \varnothing$,则存在 $z, w \in S$,使得 $zt_1 = t_1, zs_1 = 0$,或者 $zs_1 = s_1, zt_1 = 0$;$ws_n = s_n, wt_n = 0$,或者 $wt_n = t_n, ws_n = 0$. 所以 $zs_1b = zt_1b_2, ws_nb_n = wt_nb'$. 因此,$0b$

$= t_1b_2 = s_1b = 0b_2 = \cdots = 0b_n = 0b', 0b' = s_nb_n = t_nb' = 0b_n = 00$
$= 0b_2 = 0b$. 故有如下的等式组：

$$a = (as_1')s_1,$$
$$(as_1')0 = (a't_n')0, \qquad s_1b = 0b',$$
$$(a't_n')t_n = a', \qquad 0b' = t_nb'.$$

所以在$(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$.

这样就证明了 B 是平坦 S- 系. 所以 S^1 是左绝对平坦的.

(1)⇒(2) 设 S^1 是左绝对平坦幺半群，但 S 不满足条件(2)，则存在 $x, y \in S$，使得 $\mathrm{ann}_l(x) = \mathrm{ann}_l(y)$ 但 $xS \neq yS$. 因为 S 是本原正则半群，所以 $xS \cap yS = \{0\}$. 设 $x = 0$，则 $\mathrm{ann}_l(x) = \mathrm{ann}_l(0) = S = \mathrm{ann}_l(y)$，所以 $y = 0$，从而 $xS = \{0\} = yS$，矛盾. 所以 $x \neq 0$. 下面证明 $S^1/\lambda(x,y)$ 不是平坦的.

显然在 $S^1 \otimes_{S^1} S^1/\lambda(x,y)$ 中有 $x \otimes \bar{1} = y \otimes \bar{1}$. 如果在$(xS^1 \cup yS^1) \otimes S^1/\lambda(x,y)$ 中有 $x \otimes \bar{1} = y \otimes \bar{1}$，则存在 $a_1, \cdots, a_n \in \{x, y\}$，$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S^1$，使得

$$x = a_1s_1,$$
$$a_1t_1 = a_2s_2, \qquad \overline{s_1} = \overline{t_1},$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$a_nt_n = y, \qquad \overline{s_n} = \overline{t_n}.$$

显然存在 $i \in \{0, \cdots, n\}$，使得 $a_0 = a_1 = \cdots = a_i = x, a_{i+1} = y$(为了方便，记 $a_0 = x, a_{n+1} = y$). 所以 $xt_i = ys_{i+1} \in xS \cap yS$. 但 $xt_i \neq 0$. 否则，设 $xt_i = 0$，则 $x \in \mathrm{ann}_l(t_i)$. 因为 $s_i\lambda(x,y)t_i$ 而且 $\mathrm{ann}_l(x) = \mathrm{ann}_l(y)$，所以容易得到 $\mathrm{ann}_l(s_i) = \mathrm{ann}_l(t_i)$. 因此 $x \in \mathrm{ann}_l(s_i)$ 即 $xs_i = 0$，故 $xt_{i-1} = 0$. 继续下去，可得 $xt_1 = 0$. 所以 $x \in \mathrm{ann}_l(t_1) = \mathrm{ann}_l(s_1)$，从而 $x = a_1s_1 = xs_1 = 0$. 和 $x \neq 0$ 的条件矛盾. 所以 $0 \neq xt_i \in xS \cap yS$. 这和 $xS \cap yS = \{0\}$ 矛盾. 矛盾说明在$(xS^1 \cup yS^1) \otimes S^1/\lambda(x,y)$ 中 $x \otimes \bar{1} \neq y \otimes \bar{1}$. 所以 $S^1/\lambda(x,y)$ 不是平坦 S- 系. //

从上述证明过程可得：

定理 2.3 设 S 是本原正则半群，则以下几条等价：

(1) S^1 是左绝对平坦的；

(2) 任意循环 S^1- 系是平坦的；

(3) 任意 S^1- 系是弱平坦的；

(4) 任意循环 S^1- 系是弱平坦的；

(5) 对任意 $x,y \in S$，若 $\mathrm{ann}_l(x) = \mathrm{ann}_l(y)$，则 $xS = yS$.

完全 0- 单半群是特殊的本原正则半群. 设 $S = \mu^0[G;I,\Lambda;P]$ 是完全 0- 单半群，其中 I,Λ 是非空集合，G 是群，$P = (p_{\lambda i})$ 是 G^0 上的 $\Lambda \times I$ 矩阵，且满足

$$\forall\, i \in I, \exists\, \lambda \in \Lambda, \text{使得 } p_{\lambda i} \neq 0,$$

$$\forall\, \lambda \in \Lambda, \exists\, i \in I, \text{使得 } p_{\lambda i} \neq 0.$$

令 $s(P) = (q_{\lambda i})$ 是 G^0 上的如下定义的 $\Lambda \times I$ 矩阵：

$$q_{\lambda i} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } p_{\lambda i} \neq 0, \\ 0, & \text{如果 } p_{\lambda i} = 0, \end{cases} \qquad \forall\, i \in I, \forall\, \lambda \in \Lambda,$$

其中 1 是群 G 的单位元.

定理 2.4 设 $S = \mu^0[G;I,\Lambda;P]$ 是 Rees 矩阵半群，则以下几条是等价的：

(1) S^1 是左绝对平坦的；

(2) 任意 S^1- 系是弱平坦的；

(3) 任意循环 S^1- 系是弱平坦的；

(4) $s(P)$ 的任意两列都不相同.

证明 只需证明对于 Rees 矩阵半群 $S = \mu^0[G;I,\Lambda;P]$，定理 2.3 中的(5) 等价于定理 2.4 中的(4) 即可.

设 $s(P)$ 的 i,j 两列相同，则有

$$p_{\lambda i} \neq 0 \Leftrightarrow p_{\lambda j} \neq 0, \quad \forall\, \lambda \in \Lambda.$$

令 $x = (1,i,\mu), y = (1,j,\mu)$，其中 $\mu \in \Lambda$，容易证明 $\mathrm{ann}_l(x) = \mathrm{ann}_l(y)$. 但因 $i \neq j$，所以 $xS \neq yS$.

反过来，设 $x = (a,i,\mu), y = (a',i',\mu') \in S$，若 $i \neq i'$，则 $xS \neq yS$. 因为 $s(P)$ 的 i,i' 两列不相同，所以存在 $\lambda \in \Lambda$，使得 $p_{\lambda i} = 0$ 而 $p_{\lambda i'} \neq 0$. 令 $w = (1,i,\lambda)$，则 $wx = 0$，但 $wy \neq 0$. 所以 $\mathrm{ann}_l(x) \neq \mathrm{ann}_l(y)$. 若 $i = i'$，则 $xS = yS$. //

例 2.5 令 $S=\mu^0[\{1\};\{1,2\},\{1\};(11)]$，则由定理 2.4 知 S^1 是右绝对平坦的但不是左绝对平坦的.

称半群 S 是同余自由的，如果除了 1_s 和 $S\times S$ 以外，S 再没有其他的同余，下面的关于有限同余自由半群的构造定理可见 Yamura[160] 或 Howie[70].

定理 2.6 设 $I=\{1,\cdots,m\}$，$\Lambda=\{1,\cdots,n\}$，$P=(p_{\lambda i})$ 是元素取值于 $\{1,0\}$ 的 $n\times m$ 矩阵，且每个行和每个列上都有非零元，任意两个行不相同，任意两个列不相同. 令 $S=(I\times\Lambda)\cup\{0\}$，规定乘法为

$$(i,\lambda)(j,\mu)=\begin{cases}(i,\mu), & \text{如果 } p_{\lambda j}=1,\\ 0, & \text{如果 } p_{\lambda j}=0,\end{cases}$$

$$(i,\lambda)0=0(i,\lambda)=00=0,$$

则 S 是阶为 $mn+1$ 的同余自由半群. 反之，任意含零元的有限同余自由半群都可如此构造.

因此有如下的

定理 2.7 设 S 是带零的有限同余自由半群，则 S^1 是左、右绝对平坦幺半群.

由定理 1.1 知逆幺半群是左、右绝对平坦的. 利用本节的结果可以给出左、右绝对平坦但不是逆半群的例子.

例 2.8 设 $G=\{1\}$，$I=\Lambda=\{1,2\}$，$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，作 Rees 矩阵半群 $S=\mu^0[G;I,\Lambda;P]$，则 S 是有限同余自由半群，所以 S^1 是左、右绝对平坦幺半群，但 S 不是逆半群，这可由 S 的如下乘法表看出(非平凡部分)：

	e	f	g	s
e	e	f	e	f
f	e	f	0	0
g	g	s	g	s
s	g	s	0	0

§3 广义逆半群

设 S 是正则半群. 称 S 是广义逆半群，如果 $E(S)$ 是正规带. 称 S 是左(右) 广义逆半群，如果 $E(S)$ 是左(右) 正规带. 容易证明 S 是广义逆半群当且仅当 S 是正则的且对任意 $x,y \in S$，任意 $e,f \in E(S)$，恒有 $xefy = xfey$；S 是左(右) 广义逆半群当且仅当 S 是正则的且对任意 $x \in S$，任意 $e,f \in E(S)$，恒有 $xef = xfe(efx = fex)$. 本节刻画左绝对平坦的广义逆半群，其主要结果取自于[18].

命题 3.1 设 S 是右广义逆半群，$e_1,e_2,f_1,f_2 \in E(S)$，满足 $e_1\mathscr{R}e_2, f_1\mathscr{R}f_2, f_1e_1 = f_1, f_2e_2 = f_2$. 如果 $(f_1,f_2) \in \lambda(e_1,f_1) \vee \lambda(e_2,f_2)$，那么 $f_1 = f_2$.

证明 记 $\lambda_1 = \lambda(e_1,f_1), \lambda_2 = \lambda(e_2,f_2), \Phi = \lambda_1 \cdot \lambda_2$. 因为 $\lambda_1 \vee \lambda_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty}\Phi^n$，只需证明若 $(f_1,f_2) \in \Phi^n$，则 $f_1 = f_2$. 对 n 使用数学归纳法.

设 $(f_1,f_2) \in \Phi^1$，则存在 $z \in S^1$，使得 $f_1\lambda_1 z\lambda_2 f_2$. 设 $z = f_1$，则 $(f_1,f_2) \in \lambda_2$. 所以 $f_1 = f_2$ 或存在 $t_1,\cdots,t_n \in S$，$\{c_i,d_i\} = \{e_2,f_2\}$，$i = 1,2,\cdots,n$，使得

$$f_1 = t_1c_1,$$
$$t_1d_1 = t_2c_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$t_nd_n = f_2.$$

上述等式组均右乘 e_2，利用 $f_2e_2 = f_2$ 即可得到 $f_1 = f_1e_2, f_2 = f_2e_2$. 若 $c_1 = e_2$，则 $f_1f_2 = t_1e_2f_2 = t_1e_2f_2f_2 = t_1f_2e_2f_2 = t_1f_2f_2 = t_1d_1f_2$. 若 $c_1 = f_2$，则 $f_1f_2 = t_1f_2f_2 = t_1f_2e_2f_2 = t_1e_2f_2f_2 = t_1e_2f_2 = t_1d_1f_2$. 继续上述过程，类似的讨论可以证明 $f_1f_2 = t_1d_1f_2 = t_2d_2f_2 = \cdots = t_nd_nf_2 = f_2$. 又因为 $f_1\mathscr{R}f_2$，所以 $f_1e_2 = f_2x, x \in S$.

因此 $f_2f_1e_2 = f_1e_2$. 因为 S 是右广义逆半群，所以 $f_1 = f_1e_2 = f_2f_1e_2 = f_1f_2e_2 = f_1f_2 = f_2$. 设 $z = f_2$，则 $(f_1,f_2) \in \lambda_1$. 同上类似的讨论即可完成证明. 所以下设 $f_1 \neq z \neq f_2$，则有 $(f_1,z) \in \lambda_1$，$(f_2,z) \in \lambda_2$. 所以同上类似的讨论可知 $f_1e_1 = f_1, ze_1 = z, f_1 = zf_1, f_2e_2 = f_2, ze_2 = z, f_2 = zf_2$. 显然 $z \neq 1$（否则 $e_1 = 1$）. 设 $z' \in V(z)$，则有

$$\begin{aligned} f_1 &= zf_1 = zf_1e_1 = zz'zf_1e_1 = zf_1z'ze_1 \\ &= zf_1z'z = zf_1z'ze_2 = zz'zf_1e_2 \\ &= zf_1e_2 = f_1e_2 = f_2f_1e_2 = f_1f_2e_2 = f_1f_2 \\ &= f_2. \end{aligned}$$

设 $n \geqslant 2$，$(f_1,f_2) \in \Phi^n$，则存在 $z_1,z_2 \in S^1$，使得 $f_1\Phi^{n-1}z_1\lambda_1z_2\lambda_2f_2$. 若 $z_1 = z_2$，则 $f_1\Phi^{n-1}z_2\lambda_2f_2$，所以 $f_1\Phi^{n-1}f_2$. 由归纳假定即知 $f_1 = f_2$. 若 $f_1 = z_1$，则 $f_1\lambda_1z_2\lambda_2f_2$，即 $f_1\Phi^1f_2$. 若 $f_2 = z_2$，则 $f_2\lambda_1z_1\Phi^{n-1}f_1$，即 $f_2\Phi^{n-1}f_1$. 故有 $f_1 = f_2$. 下设 $f_1 \neq z_1 \neq z_2 \neq f_2$. 类似于前面的讨论可知 $z_1e_1 = z_1, z_2e_1 = z_2, z_1f_1 = z_2f_1, z_2e_2 = z_2, f_2e_2 = f_2, z_2f_2 = f_2$. 所以 $f_1 = f_2f_1 = z_2f_2f_1 = z_2f_1$. 又 $f_1e_1 = f_1, z_2e_1 = z_2$，所以容易证明 $(f_1,z_2) \in \lambda_1$（利用命题 1.1.3）. 因此 $f_1\Phi^1f_2$，故 $f_1 = f_2$. //

下面是本节的主要定理.

定理 3.2 设 S 是右广义逆半群，则以下三条是等价的：

(1) S^1 是左绝对平坦的；

(2) 所有循环 S^1- 系是平坦的；

(3) 对任意 $e,f,g \in E(S)$，恒有：$efg = fg$ 或 $efg = egf$.

证明 (1)⇒(2) 显然.

(2)⇒(3) 设 $e,f,g \in E(S)$，但 $efg \neq fg$. 令 $e_1 = fg, e_2 = gf, f_1 = efg, f_2 = egf$. 容易证明 $e_1,e_2,f_1,f_2 \in E(S)$，且 $e_1\mathscr{R}e_2$，$f_1\mathscr{R}f_2$，$f_1e_1 = f_1, f_2e_2 = f_2$. 记 $\lambda_1 = \lambda(e_1,f_1), \lambda_2 = \lambda(e_2,f_2)$，$\rho$ 为 S 上由 (e_1,e_2) 生成的最小右同余. 因为 $e_1\mathscr{R}e_2$，所以 $e_1e_2 = e_2, e_2e_1 = e_1$. 设 $x,y \in S$ 且 $x\rho y$，则 $x = y$ 或存在 $t_1,\cdots,t_n \in S^1$，使得

$$x = c_1 t_1,$$
$$d_1 t_1 = c_2 t_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$d_n t_n = y,$$

其中$\{c_i, d_i\} = \{e_1, e_2\}, i = 1, \cdots, n$ 显然$e_1 x = x, e_1 y = y, e_2 x = x$, $e_2 y = y$. 设$t_1, \cdots, t_n \in S$. 若$c_1 = e_1$, 则$d_1 = e_2$, 所以$e_1 x = e_1 c_1 t_1 = e_1 t_1 = e_2 e_1 t_1 = e_1 e_2 t_1 = e_1 d_1 t_1, e_2 x = e_2 c_1 t_1 = e_2 e_1 t_1 = e_1 e_2 t_1 = e_1 d_1 t_1$. 若$c_1 = e_2$, 则$d_1 = e_1$, 所以$e_1 x = e_1 e_2 t_1 = e_2 e_1 t_1 = e_2 d_1 t_1, e_2 x = e_2 t_1 = e_1 e_2 t_1 = e_2 e_1 t_1 = e_2 d_1 t_1$. 用数学归纳法可以证明$e_1 x = h d_n t_n = hy$, 其中$h \in \{e_1, e_2\}$. 所以$x = e_1 x = hy = y$. 设$t_1, \cdots, t_i \in S$但$t_{i+1} = 1$, 则有

$$x = c_1 t_1, d_1 t_1 = c_2 t_2, \cdots, d_i t_i = c_{i+1}.$$

同上类似的证明可知$c = c_{i+1} \in \{e_1, e_2\}$. 同理可证明$y \in \{e_1, e_2\}$. 这说明若$x \rho y$, 则$x = y$或$\{x, y\} = \{e_1, e_2\}$.

作S^1-同态$\alpha: f_1 S \cup f_2 S \to S/\rho$如下:

$$\alpha(s) = \bar{s}, \quad \forall s \in f_1 S \cup f_2 S.$$

若$\overline{f_1 s} = \overline{f_2 t}$, 则$f_1 s \rho f_2 t$. 设$f_1 s \neq f_2 t$, 则$\{f_1 s, f_2 t\} = \{e_1, e_2\}$. 设$f_1 s = e_1$, 则$f_1 e_1 = e_1$, 所以$e_1 = f_1$, 即$fg = efg$. 矛盾. 设$f_1 s = e_2$, 则$f_1 e_2 = e_2$, 所以$efggf = gf$. 因此$fg = fgg = gfg = efgfg = efg$. 矛盾. 所以一定有$f_1 s = f_2 t$. 同样的方法可以用来考虑其他情形. 因此$\alpha$是单同态. 在$S^1/\rho \otimes S^1/(\lambda_1 \vee \lambda_2)$中, $\overline{f_1} \otimes \bar{1} = \bar{1} \otimes \overline{f_1} = \bar{1} \otimes \overline{e_1} = \overline{e_1} \otimes \bar{1} = \overline{e_2} \otimes \bar{1} = \bar{1} \otimes \overline{e_2} = \bar{1} \otimes \overline{f_2} = \overline{f_2} \otimes \bar{1}$. 因为循环$S$-系$S^1/(\lambda_1 \vee \lambda_2)$是平坦的, 所以在$(f_1 S \cup f_2 S) \otimes S^1/(\lambda_1 \vee \lambda_2)$中有$\overline{f_1} \otimes \bar{1} = \overline{f_2} \otimes \bar{1}$. 因此存在$a_1, \cdots, a_n \in f_1 S \cup f_2 S, b_2, \cdots, b_n \in S^1, s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S^1$, 使得

$$\begin{aligned} & f_1 = a_1 s_1, & & \\ & a_1 t_1 = a_2 s_2, & & s_1 \bar{1} = t_1 \overline{b_2}, \\ & \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ & a_n t_n = f_2, & & s_n \overline{b_n} = t_n \bar{1}. \end{aligned}$$

所以 $f_1 = a_1s_1(\lambda_1 \vee \lambda_2)a_1t_1b_2 = a_2s_2b_2(\lambda_1 \vee \lambda_2)a_2t_2b_3 = \cdots = a_ns_nb_n(\lambda_1 \vee \lambda_2)a_nt_n = f_2$,即 $f_1(\lambda_1 \vee \lambda_2)f_2$. 由前一命题即知 $f_1 = f_2$,所以 $efg = egf$.

(3)⇒(1) 设 A 是右 S^1-系,B 是左 S^1-系,$a,a' \in A,b,b' \in B$,在 $A \otimes_{S^1} B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$,则存在 $a_1,\cdots,a_n \in A,b_2,\cdots,b_n \in B,s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n \in S^1$,使得

$$\begin{aligned} a &= a_1s_1, & & \\ a_1t_1 &= a_2s_2, & s_1b &= t_1b_2, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ a_nt_n &= a', & s_nb_n &= t_nb'. \end{aligned}$$

下面用数学归纳法证明在 $(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$. 约定对于 $s \in S,s' \in V(s)$.

设 $n = 1$. 此时

$$\begin{aligned} a &= a_1s_1, & & \\ a_1t_1 &= a', & s_1b &= t_1b'. \end{aligned}$$

因为 S^1 是正则的,且对任意 $x,y \in S,z = xx'yy'x = yy'xx'x = yy'x \in xS \cap yS,z = xx'yy'x\lambda(x,y)xx'yy'y = xx'y\lambda(x,y)xx'x = x$,所以由定理 4.5.12 知所有 S^1-系是弱平坦的. 因此由引理 5.3.2 知在 $(aS^1 \cup a'S^1) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$.

设 $n > 1$. 如果 $a_it_i = a_{i+1}s_{i+1} \in aS^1$,其中 $i \in \{1,\cdots,n-1\}$,则有如下的两个等式组:

$$\begin{aligned} a &= a_1s_1, & & \\ a_1t_1 &= a_2s_2, & s_1b &= t_1b_2, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ a_it_i &= a_{i+1}s_{i+1}, & s_ib_i &= t_ib_{i+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_it_i &= a_{i+1}s_{i+1}, & & \\ a_{i+1}t_{i+1} &= a_{i+2}s_{i+2}, & s_{i+1}b_{i+1} &= t_{i+1}b_{i+2}, \end{aligned}$$

$\cdots\cdots$ $\qquad\qquad$ $\cdots\cdots$

$a_n t_n = a'$, $\qquad\qquad$ $s_n b_n = t_n b'$.

由归纳假定可知,在$(aS \cup a_{i+1}s_{i+1}S) \otimes B$中有$a \otimes b = a_{i+1}s_{i+1} \otimes b_{i+1}$;在$(a_i t_i S \cup a'S) \otimes B$中有$a_i t_i \otimes b_{i+1} = a' \otimes b'$,所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$.即结论成立.

设$s_1 = 1$,则$a_1 t_1 = a t_1 \in aS^1$,所以由前面的讨论知结论成立.设$s_i = 1(i > 1)$,则有

$$a = a_1 s_1,$$

$$a_1 t_1 = a_2 s_2, \qquad s_1 b = t_1 b_2,$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$a_{i-1}t_{i-1}t_i = a_{i+1}s_{i+1}, \qquad s_{i-1}b_{i-1} = t_{i-1}t_i b_{i+1},$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$a_n t_n = a', \qquad s_n b_n = t_n b'.$$

由归纳假定即知结论成立.若$t_i = 1, i \in \{1,\cdots,n\}$,则可采用类似的证明.

所以以下假定$s_i \neq 1, t_i \neq 1, i \in \{1,\cdots,n\}$.令

$$z_1 = s_1', \quad z_{i+1} = z_i t_i s_{i+1}', \tag{1}$$

$$z_1' = s_1, \quad z_{i+1}' = s_{i+1} t_i' z_i', \tag{2}$$

$$w_n = t_n', \quad w_i = w_{i+1} s_{i+1} t_i', \tag{3}$$

$$w_n' = t_n, \quad w_i' = t_i s_{i+1}' w_{i+1}', \tag{4}$$

其中$1 \leqslant i \leqslant n-1$.容易看出,对任意$i \in \{1,\cdots,n\}$,有

$$w_1 s_1 = w_i z_i', \tag{5}$$

$$z_n t_n = z_i w_i'. \tag{6}$$

对i利用数学归纳法可以证明:对任意$i \in \{1,\cdots,n\}$,有

$$a z_i = a_i z_i' z_i, \tag{7}$$

$$a' w_i = a_i w_i' w_i. \tag{8}$$

例如,当$i = 1$时,$a z_1 = a s_1' = a_1 s_1 s_1' = a_1 z_1' z_1$.而

$$a z_{i+1} = a z_i t_i s_{i+1}' = a_i z_i' z_i t_i s_{i+1}' \qquad \text{(归纳假定)}$$

$$= a_i z_i' z_i t_i t_i' t_i s_{i+1}'$$

$$=a_it_it_i'z_i'z_it_is_{i+1}'$$

$$=a_{i+1}s_{i+1}t_i'z_i'z_it_is_{i+1}'$$

$$=a_{i+1}z_{i+1}'z_{i+1}. \qquad \text{(由(1)和(2))}$$

所以(7)式成立.(8)式可类似地证明.

令

$$e_i = t_i'z_i'z_it_i, \tag{9}$$

$$f_i = s_i'w_i'w_is_i, \tag{10}$$

其中 $i = 1, \cdots, n$. 设 $e_it_i't_is_{i+1}'s_{i+1} = t_i't_is_{i+1}'s_{i+1}$，则 $t_ie_is_{i+1}'s_{i+1} = t_it_i't_ie_is_{i+1}'s_{i+1} = t_ie_it_i't_is_{i+1}'s_{i+1} = t_it_i't_is_{i+1}'s_{i+1} = t_is_{i+1}'s_{i+1}$，所以

$$\begin{aligned} a_it_i &= a_{i+1}s_{i+1} = a_{i+1}s_{i+1}s_{i+1}'s_{i+1} \\ &= a_it_is_{i+1}'s_{i+1} = a_it_ie_is_{i+1}'s_{i+1} \\ &= a_it_it_i'z_i'z_it_is_{i+1}'s_{i+1} && \text{(由(9))} \\ &= a_iz_i'z_it_is_{i+1}'s_{i+1} \\ &= az_it_is_{i+1}'s_{i+1}, && \text{(由(7))} \end{aligned}$$

即 $a_it_i \in aS^1$. 由前面的讨论可知结论成立. 如果 $f_{i+1}s_{i+1}'s_{i+1}t_i't_i = s_{i+1}'s_{i+1}t_i't_i$，则类似的证明可知结论成立.

因此，由条件(3)知有

$$e_it_i't_is_{i+1}'s_{i+1} = e_is_{i+1}'s_{i+1}t_i't_i, \tag{11}$$

$$f_{i+1}t_i't_is_{i+1}'s_{i+1} = f_{i+1}s_{i+1}'s_{i+1}t_i't_i, \tag{12}$$

这里 $1 \leqslant i \leqslant n-1$. 由此可得

$$s_{i+1}e_i = z_{i+1}'z_{i+1}s_{i+1}, \tag{13}$$

$$t_if_{i+1} = w_i'w_it_i, \tag{14}$$

这是因为

$$\begin{aligned} t_if_{i+1} &= t_it_i't_if_{i+1}s_{i+1}'s_{i+1} && \text{(由(10))} \\ &= t_if_{i+1}t_i't_is_{i+1}'s_{i+1} \\ &= t_if_{i+1}s_{i+1}'s_{i+1}t_i't_i && \text{(由(12))} \\ &= t_if_{i+1}t_i't_i && \text{(由(10))} \\ &= t_is_{i+1}'w_{i+1}'w_{i+1}s_{i+1}t_i't_i && \text{(由(10))} \\ &= w_i'w_it_i. && \text{(由(3),(4))} \end{aligned}$$

(13) 的证明类似.

如果 n 是奇数,则考虑如下的等式组:

$$
\begin{aligned}
&a = (as_1')s_1, & & \\
&(as_1')s_1 = a_1 s_1, & & s_1 b = s_1 b, \\
&a_1 t_1 = a_2 s_2, & & s_1 b = t_1 b_2, \\
&\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\
&a_n t_n = a', & & s_n b_n = t_n b'.
\end{aligned}
$$

所以可以假定 n 是偶数.

现在证明如下的等式组成立:

$$
\begin{aligned}
&a = (az_1)s_1, & & \\
&(az_1)t_1 = (az_2)s_2, & & s_1 b = t_1 b_2, \\
&\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\
&(az_{n-1})t_{n-1} = (az_n)s_n, & & s_{n-1}b_{n-1} = t_{n-1}b_n, \\
&(az_n)t_n = (az_n t_n w_n)t_n, & & s_n b_n = t_n b', \\
&(az_n t_n w_n)s_n = (az_n t_n w_{n-1})t_{n-1}, & & t_n b' = s_n b_n, \\
&\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\
&(az_n t_n w_{\frac{n}{2}+2})s_{\frac{n}{2}+2} = (az_n t_n w_{\frac{n}{2}+1})t_{\frac{n}{2}+1}, & & t_{\frac{n}{2}+2}b_{\frac{n}{2}+3} = s_{\frac{n}{2}+2}b_{\frac{n}{2}+2} \\
&(az_n t_n w_{\frac{n}{2}+1})s_{\frac{n}{2}+1} = (a'w_1 s_1 z_{\frac{n}{2}})t_{\frac{n}{2}}, & & t_{\frac{n}{2}+1}b_{\frac{n}{2}+2} = s_{\frac{n}{2}+1}b_{\frac{n}{2}+1}, \\
&(a'w_1 s_1 z_{\frac{n}{2}})s_{\frac{n}{2}} = (a'w_1 s_1 z_{\frac{n}{2}-1})t_{\frac{n}{2}-1}, & & t_{\frac{n}{2}}b_{\frac{n}{2}+1} = s_{\frac{n}{2}}b_{\frac{n}{2}}, \\
&\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\
&(a'w_1 s_1 z_2)s_2 = (a'w_1 s_1 z_1)t_1, & & t_2 b_3 = s_2 b_2, \\
&(a'w_1 s_1 z_1)s_1 = (a'w_1)s_1, & & t_1 b_2 = s_1 b, \\
&(a'w_1)t_1 = (a'w_2)s_2, & & s_1 b = t_1 b_2, \\
&\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\
&(a'w_{n-1})t_{n-1} = (a'w_n)s_n, & & s_{n-1}b_{n-1} = t_{n-1}b_n, \\
&(a'w_n)t_n = a', & & s_n b_n = t_n b'.
\end{aligned}
$$

显然右边的等式无须证明.对于 $1 \leqslant i \leqslant n-1$,

$$az_i t_i = a_i z_i' z_i t_i \qquad \text{(由(7))}$$

$$=a_iz_i'z_it_it_i't_i$$

$$=a_it_it_i'z_i'z_it_i$$

$$=a_{i+1}s_{i+1}t_i'z_i'z_it_i$$

$$=a_{i+1}s_{i+1}e_i \qquad (由(9))$$

$$=a_{i+1}z_{i+1}'z_{i+1}s_{i+1} \qquad (由(13))$$

$$=az_{i+1}s_{i+1}. \qquad (由(7))$$

对于$\frac{n}{2}+1\leqslant i\leqslant n-1$，

$$az_nt_nw_{i+1}s_{i+1}=az_{i+1}w_{i+1}'w_{i+1}s_{i+1} \qquad (由(6))$$

$$=az_it_is_{i+1}'w_{i+1}'w_{i+1}s_{i+1} \qquad (由(1))$$

$$=az_it_if_{i+1} \qquad (由(10))$$

$$=az_iw_i'w_it_i \qquad (由(14))$$

$$=az_nt_nw_it_i. \qquad (由(6))$$

并且，

$$az_nt_nw_{\frac{n}{2}+1}s_{\frac{n}{2}+1}=az_{\frac{n}{2}}w_{\frac{n}{2}}'w_{\frac{n}{2}+1}s_{\frac{n}{2}+1} \qquad (由(6))$$

$$=a_{\frac{n}{2}}z_{\frac{n}{2}}'z_{\frac{n}{2}}w_{\frac{n}{2}}'w_{\frac{n}{2}+1}s_{\frac{n}{2}+1} \qquad (由(7))$$

$$=a_{\frac{n}{2}}z_{\frac{n}{2}}'z_{\frac{n}{2}}t_{\frac{n}{2}}s_{\frac{n}{2}+1}'w_{\frac{n}{2}+1}'w_{\frac{n}{2}+1}s_{\frac{n}{2}+1} \qquad (由(4))$$

$$=a_{\frac{n}{2}}z_{\frac{n}{2}}'z_{\frac{n}{2}}t_{\frac{n}{2}}f_{\frac{n}{2}+1} \qquad (由(10))$$

$$=a_{\frac{n}{2}}z_{\frac{n}{2}}'z_{\frac{n}{2}}w_{\frac{n}{2}}'w_{\frac{n}{2}}t_{\frac{n}{2}} \qquad (由(14))$$

$$=a_{\frac{n}{2}}w_{\frac{n}{2}}'w_{\frac{n}{2}}z_{\frac{n}{2}}'z_{\frac{n}{2}}t_{\frac{n}{2}}$$

$$=a'w_{\frac{n}{2}}z_{\frac{n}{2}}'z_{\frac{n}{2}}t_{\frac{n}{2}} \qquad (由(8))$$

$$=a'w_1s_1z_{\frac{n}{2}}t_{\frac{n}{2}}. \qquad (由(5))$$

其他等式的证明比较简单或与上类似. 所以在$(aS^1\cup a'S^1)\otimes B$中有$a\otimes b=a'\otimes b'$. 即$B$是平坦$S^1$-系. //

该定理的一个直接推论是：若S是逆半群，则S^1是左、右绝对平坦的，即定理 1.1.

设E是右正规带，则E是右零带的强半格，即$E=\varphi(\Gamma;R_\alpha;\varphi_{\alpha,\beta})$，这里$\Gamma$是半格，$R_\alpha(\alpha\in\Gamma)$是右零带，$E=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}R_\alpha$，$\varphi_{\alpha,\beta}:R_\alpha\to$

$R_\beta(\alpha \geqslant \beta)$ 是结构同态. 称 E 具有常值结构映射，如果当 $\alpha > \beta$ 时，$\varphi_{\alpha,\beta}$ 是常值映射. 容易证明 E 具有常值结构映射当且仅当对于任意 $e, f, g \in E$，恒有 $efg = fg$ 或 $efg = egf$. 因此定理 3.2 可以说成：若 S 是右广义逆半群，则 S^1 是左绝对平坦的当且仅当 $E(S)$ 具有常值结构映射.

推论 3.3 设 S 是完全单半群的强半格，则 S^1 是左绝对平坦的当且仅当 S 是右群的强半格且 $E(S)$ 具有常值结构映射.

证明 设 $S = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} R_\alpha$，$\Gamma$ 是半格，$R_\alpha(\alpha \in \Gamma)$ 是完全单半群. 若 S^1 是左绝对平坦的，则类似于定理 1.6 的证明可知每个 R_α 是右群，即右单左可消半群. 已知 R_α 是右群当且仅当 R_α 是群的不交并且这些群的单位元构成右零带，所以 $E(S)$ 是右零带的强半格，即 $E(S)$ 是右正规带. 因此由定理 3.2 知 $E(S)$ 具有常值结构映射. 反过来的证明由定理 3.2 即得. //

推论 3.4 设 B 是右正规带，则 B^1 是左绝对平坦的当且仅当 B 具有常值结构映射. //

为了考虑广义逆半群，先给出下面的引理：

引理 3.5 设 S 是幺半群，$s, t \in S$，A 是右 S-系，$a, a' \in A$，则在 $A \otimes S/\lambda(s,t)$ 中有 $a \otimes \bar{1} = a' \otimes \bar{1}$ 的充要条件是 $a = a'$，或存在 $a_1, \cdots, a_n \in A$，$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$，使得 $\{s_i, t_i\} = \{s, t\}$，$i = 1, \cdots, n$，且

$$
\begin{aligned}
a &= a_1 s_1, \\
a_1 t_1 &= a_2 s_2, \\
&\cdots\cdots \\
a_n t_n &= a'.
\end{aligned}
$$

证明 在 A 上定义关系 ψ 如下：

$$
\begin{aligned}
a \psi a' \Leftrightarrow a = a' \text{ 或存在 } & a_1, \cdots, a_n \in A, \\
& s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S, \text{使得} \\
& \{s_i, t_i\} = \{s, t\}, i = 1, \cdots, n, \\
& \text{且如上等式组成立.}
\end{aligned}
$$

容易验证ψ是A上的等价关系. 作映射$f: A\times S/\lambda(s,t)\rightarrow A/\psi$如下：

$$f(a,\bar{u})=\overline{au},\quad \forall\, a\in A,\forall\, u\in S,$$

则f有定义且满足$f(ax,\bar{u})=f(a,x\bar{u})(\forall\, x,u\in S,\forall\, a\in A)$. 所以存在映射$F: A\otimes S/\lambda(s,t)\rightarrow A/\psi$且$F$是双射. 因此$a\otimes\bar{1}=a'\otimes\bar{1}\Leftrightarrow F(a\otimes\bar{1})=F(a'\otimes\bar{1})\Leftrightarrow a\psi a'$. //

定理 3.6 设S是广义逆半群. 若S^1是左绝对平坦的，则S是右广义逆半群.

证明 设$e,f\in E(S)$满足$efe=e,fef=f$. 下证$ef=f$.

考虑S^1-系$S^1/\lambda(e,f)$. 显然在$S^1\underset{S^1}{\otimes}S^1/\lambda(e,f)$中有$e\otimes\bar{1}=f\otimes\bar{1}$，所以在$(eS\cup fS)\otimes S^1/\lambda(e,f)$中有$e\otimes\bar{1}=f\otimes\bar{1}$. 由引理3.5知$e=f$或者存在$a_1,\cdots,a_n\in eS\cup fS,s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S^1$，使得$\{s_i,t_i\}=\{e,f\},i=1,2,\cdots,n$，且

$$e=a_1s_1,$$
$$a_1t_1=a_2s_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_nt_n=f.$$

显然$fs_1f=f$，所以$a_1fe=a_1fs_1fe=a_1s_1fe=efe=e$，归纳假定$a_{k-1}fe=e(k\geqslant 2)$，则$a_kfe=a_kfs_kfe=a_ks_kfe=a_{k-1}t_{k-1}fe=a_{k-1}ft_{k-1}fe=a_{k-1}fe=e$. 所以由数学归纳法知对任意$i\in\{1,\cdots,n\}$，有$a_ife=e$. 因此$a_nfe=e$. 所以$ef=a_nfef=a_nf=a_nft_nf=a_nt_nf=ff=f$.

现在设$e,f,g\in E(S)$，令$x=efg,y=feg$，则$x,y\in E(S)$，且$xyx=x,yxy=y$. 所以由已证的结果知$xy=y$，即$feg=efgfeg=efg$. 故S是右广义逆半群. //

定理 3.7 设S是广义逆半群，则S^1是左绝对平坦的当且仅当S是右广义逆半群且$E(S)$具有常值结构映射.

证明 由定理3.2和定理3.6即得. //

推论 3.8 设B是正规带，则B^1是左绝对平坦的当且仅当B

是右正规带且具有常值结构映射.

推论 3.9 设 B 是左正规带,则 B^1 是左绝对平坦的当且仅当 B 是半格.

证明 若 B^1 是左绝对平坦的,则 B 是右正规带,从而 B 是半格.反过来的证明是显然的. //

§4 带

本节考虑左绝对平坦带,其主要结果选自[20].

设 B 是带,称 B 是右正则带,如果对于任意 $x,y\in S$,有 $xyx = yx$.

定理 4.1 设 B 是带.若 B^1 是左绝对平坦的,则 B 是右正则带.

证明 因为任意带都是矩形带的半格,所以可设 $B=\dot{\bigcup}_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha$,其中 Γ 是半格,B_α 是矩形带.对于任意 $\beta\in\Gamma$,令

$$B_{[\beta)}=\dot{\bigcup}\,\{B_\alpha\,|\,\alpha\in\Gamma,\alpha\geqslant\beta\},$$

则 $B_{[\beta)}$ 是 B 的滤子,所以由引理 1.5 知 $B^1_{[\beta)}$ 是左绝对平坦的.再由定理 5.5.5 即知 $B_{[\beta)}$,从而 B_β 的任意两个右理想有非空的交.设 $(i,\lambda),(i',\lambda')\in B_\beta$,则 $(i,\lambda)B_\beta\cap(i',\lambda')B_\beta\neq\varnothing$.所以存在 $(j,\mu),(j',\mu')\in B_\beta$,使得 $(i,\lambda)(j,\mu)=(i',\lambda')(j',\mu')$.由此即得 $i=i'$.所以 B_β 为右零带.因此 B 是右零带的半格,故 B 是右正则带. //

所以在考虑左绝对平坦带 S 时,假定 S 是右正则的.

设 S 是右正则带,则 $S=\dot{\bigcup}_{\alpha\in\Gamma}S_\alpha$,其中 Γ 是半格,每个 S_α 是右零带,且 $S_\alpha S_\beta\subseteq S_{\alpha\beta}$,即 S 是右零带的半格.

命题 4.2 设 $S=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}S_\alpha$ 是右正则带,则以下两条是等价的:

(1) 对任意 $\alpha,\beta\in\Gamma,\alpha<\beta$,任意 $u_1,v_1,\cdots,u_m,v_m\in S_\beta$,任意右 S-系 A,任意 $a_1,\cdots,a_{m+1}\in A$,如果 $a_iu_i=a_{i+1}v_i(1\leqslant i\leqslant m)$,那么存在 $w\in S_\alpha$,使得 $a_iwu_i=a_{i+1}wv_i(1\leqslant i\leqslant m)$;

(2) 对任意 $\alpha,\beta\in\Gamma,\alpha<\beta$，任意 $u_1,v_1,\cdots,u_m,v_m\in S_\beta$，记 $\theta_R=\theta_R((u_1,v_1),\cdots,(u_m,v_m))$ 为 S 的包含 $(u_1,v_1),\cdots,(u_m,v_m)$ 的最小右同余，则存在 $w\in S_\alpha$，使得 $(wu_i,wv_i)\in\theta_R(1\leqslant i\leqslant m)$.

证明 (1)⇒(2) 令 $A=S/\theta_R$，记 u_1 所在的类为 $\overline{u_1}$. 因为 S_β 是右零带，所以，$\overline{u_1}u_i=\overline{u_1u_i}=\overline{u_i}=\overline{v_i}=\overline{u_1v_i}=\overline{u_1}v_i,1\leqslant i\leqslant m$. 因此由(1) 知存在 $w\in S_\alpha$，使得 $\overline{u_1}wu_i=\overline{u_1}wv_i(1\leqslant i\leqslant m)$. 而 S_α 是右零带，所以 $u_1w=u_1ww=w$，故 $wu_i\theta_Rwv_i(1\leqslant i\leqslant m)$.

(2)⇒(1) 设 A 是任意右 S- 系，$a_1,\cdots,a_{m+1}\in A$，且 $a_iu_i=a_{i+1}v_i(1\leqslant i\leqslant m)$. 由于 S_β 是右零带，所以 $a_iu_i=a_iv_i=a_{i+1}u_i=a_{i+1}v_i(1\leqslant i\leqslant m)$. 对任意 $s\in S_\beta$，显然有 $a_is=a_{i+1}s$，所以 $a_is=a_js,1\leqslant i,j\leqslant m+1$. 对任意 $s\in S_\alpha,\alpha<\beta,a_is=a_iu_iss=a_iu_is=a_{i+1}v_is=a_{i+1}s$，所以 $a_is=a_js,1\leqslant i,j\leqslant m+1$. 记 $\theta_R=\theta_R((u_1,v_1),(v_1,u_1),\cdots,(u_m,v_m),(v_m,u_m))$. 由(2) 知存在 $w\in S_\alpha$，使得 $(wu_i,wv_i)\in\theta_R(1\leqslant i\leqslant m)$. 对任意 $k\in\{1,\cdots,m\}$，要证明 $a_kwu_k=a_{k+1}wv_k$.

设 $wu_k=wv_k$，则 $a_kwu_k=a_ku_kwu_k=a_{k+1}v_kwu_k=a_{k+1}v_kwv_k=a_{k+1}wv_k$. 结论成立.

设 $wu_k\neq wv_k$，则存在 $s_1,\cdots,s_n\in S^1,y_1,z_1,\cdots,y_n,z_n\in S_\beta$，使得 $(y_i,z_i)\in\{(u_1,v_1),(v_1,u_1),\cdots,(u_m,v_m),(v_m,u_m)\}$，且

$$wu_k=y_1s_1,$$
$$z_1s_1=y_2s_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$z_ns_n=wv_k.$$

对任意 $i\in\{1,\cdots,n\}$，存在 $j_i\in\{1,\cdots,m\}$，使得 $(y_i,z_i)\in\{(u_{j_i},v_{j_i}),(v_{j_i},u_{j_i})\}$. 所以有

$$\begin{aligned}a_kwu_k&=a_ky_1s_1=a_{j_1}y_1s_1=a_{j_1}z_1s_1=a_{j_1}y_2s_2=a_{j_2}y_2s_2\\&=a_{j_2}z_2s_2=\cdots=a_{j_n}z_ns_n=a_{j_n}wv_k\\&=a_{k+1}wv_k.\end{aligned}$$

//

下面是本节的主要定理.

定理4.3 设 S 是带. 若 S^1 是左绝对平坦的，则对任意 $\alpha,\beta\in\Gamma,\alpha<\beta$，任意 $u_1,v_1,\cdots,u_m,v_m\in S_\beta$，存在 $w\in S_\alpha$，使得 $(wu_i,wv_i)\in\theta_R=\theta_R((u_1,v_1),\cdots,(u_m,v_m))(1\leqslant i\leqslant m)$.

证明 S 是右正则带，所以 S 是右零带的半格，即 $S=\dot{\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}}S_\alpha$，每个 S_α 是右零带. 记 $F=\{(u_1,v_1),\cdots,(u_m,v_m)\}$.

首先设 $\theta_R(F)\cap(S_\alpha\times S_\alpha)\subseteq\Delta$（$\Delta$ 为 S_α 上的单位同余）. 因为 $\alpha<\beta$，所以要证明存在 $w\in S_\alpha$，使得 $wu_i=wv_i,1\leqslant i\leqslant m$. 类似于定理 4.1 的证明过程，可以假定 α 是 Γ 中的最小元. 由 $\theta_R(F)\cap(S_\alpha\times S_\alpha)\subseteq\Delta$ 容易得到自然的包含同态 $S_\alpha\hookrightarrow S/\theta_R(F)$（因为 α 在 Γ 中最小，所以 S_α 是右 S- 系）. 任取 $l\in S_\alpha$. 令

$$Y=S^1y\ \dot{\cup}\ S^1y_1\ \dot{\cup}\ \cdots\ \dot{\cup}\ S^1y_m\ \dot{\cup}\ S^1y'$$

是自由左 S^1- 系，$y,y_1,\cdots,y_m,y'$ 是其自由生成子. 记

$$G=\{(ly,u_1y_1),(v_1y_1,u_2y_2),\cdots,$$
$$(v_{m-1}y_{m-1},u_my_m),(v_my_m,ly')\},$$

$\lambda=\lambda(G)$ 是由 G 生成的 Y 上的同余. 在张量积 $S/\theta_R(F)\otimes S/\lambda$ 中有

$$\begin{aligned}\bar{l}\otimes\bar{y}&=\overline{u_1l}\otimes\bar{y}=\overline{u_1}\otimes\overline{ly}=\overline{u_1}\otimes\overline{u_1y_1}=\overline{u_1}\otimes\overline{y_1}\\&=\overline{v_1}\otimes\overline{y_1}=\overline{v_1}\otimes\overline{v_1y_1}=\overline{v_1}\otimes\overline{u_2y_2}=\overline{v_1u_2}\otimes\overline{y_2}\\&=\overline{u_2}\otimes\overline{y_2}=\overline{v_2}\otimes\overline{y_2}=\cdots=\overline{v_m}\otimes\overline{y_m}\\&=\overline{v_m}\otimes\overline{v_my_m}=\overline{v_m}\otimes\overline{ly'}=\overline{v_ml}\otimes\overline{y'}=\bar{l}\otimes\overline{y'}.\end{aligned}$$

因为 S/λ 是平坦的，所以在 $S_\alpha\otimes S/\lambda$ 中有 $l\otimes\bar{y}=l\otimes\overline{y'}$，因此在 $S^1\otimes S/\lambda\simeq S/\lambda$ 中亦有 $l\otimes\bar{y}=l\otimes\overline{y'}$. 故 $(ly,ly')\in\lambda$. 所以存在 $s_1,\cdots,s_n\in S^1,(x_1,z_1),\cdots,(x_n,z_n)\in G\cup G^{-1}$，使得

$$\begin{aligned}&ly=s_1x_1,\\&s_1z_1=s_2x_2,\\&\cdots\cdots\\&s_{n-1}z_{n-1}=s_nx_n,\\&s_nz_n=ly'.\end{aligned}$$

假设 n 是最小的连接 ly 和 ly' 的自然数. 下面证明$(x_i,z_i)\in G(1\leqslant i\leqslant n)$. 因为 $ly=s_1x_1$,所以 $x_1=ly$,因此$(x_1,z_1)\in G$. 假设存在 j 使得$(x_j,z_j)\in G^{-1}$,再设 i 是这样的 j 中最小者. 因为 $s_{i-1}z_{i-1}=s_ix_i$,而$(x_{i-1},z_{i-1})\in G$,所以 $x_i=z_{i-1}$. 考虑以下三种情形:

(i) $z_{i-1}=u_1y_1$. 此时 $s_iz_i=s_ily=ly$,所以有

$$ly=s_{i+1}x_{i+1},$$

$$s_{i+1}z_{i+1}=s_{i+2}x_{i-2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$s_nz_n=ly'.$$

这与 n 的最小性矛盾.

(ii) $z_{i-1}=u_jy_j$,其中 $2\leqslant j\leqslant m$. 由 $s_{i-1}z_{i-1}=s_ix_i$ 可得 $s_{i-1}u_jy_j=s_iu_jy_j$,所以 $s_{i-1}u_j=s_iu_j$,从而 $s_{i-1}v_{j-1}=s_iv_{j-1}$. 所以由 $x_{i-1}=v_{j-1}y_{j-1},z_i=v_{j-1}y_{j-1}$ 可得 $s_{i-1}x_{i-1}=s_iz_i$. 因此下面的三个等式

$$s_{i-2}z_{i-2}=s_{i-1}x_{i-1},\quad s_{i-1}z_{i-1}=s_ix_i,\quad s_iz_i=s_{i+1}x_{i+1}$$

可用一个等式 $s_{i-2}z_{i-2}=s_{i+1}x_{i+1}$ 来代替. 这和 n 的最小性发生矛盾.

(iii) $z_{i-1}=ly'$. 此时有 $s_ix_i=s_ily'=ly'$. 又可得到一个个数较少的等式组,矛盾.

因此有如下的等式组:

$$ly=s_1ly,$$

$$s_1u_1y_1=s_2v_1y_1,$$

$$s_2u_2y_2=s_3v_2y_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$s_mu_my_m=s_{m+1}v_my_m,$$

$$s_{m+1}ly'=ly'.$$

因为 $y,y_1,\cdots,y_m,y'$ 是自由生成子,所以有

$$l=s_1l,$$

$$s_1u_1=s_2v_1,$$

$$s_2u_2 = s_3v_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$s_mu_m = s_{m+1}v_m,$$
$$s_{m+1}l = l.$$

令 $w = ls_1$，则对任意 $1 \leqslant i \leqslant m$，$wu_i = ls_1u_i = ls_1u_1u_i = ls_2v_1u_i = ls_2u_2u_i = \cdots = ls_iu_iu_i = ls_iu_i = ls_{i+1}v_i = (ls_{i+1}v_i)v_i = wu_iv_i = wv_i$. 此即完成了特殊情形下的证明.

最后考虑一般情形. 令

$$S_{[\alpha)} = \bigcup \{S_\delta \mid \delta \in \Gamma, \delta \geqslant \alpha\},$$
$$\theta = (\theta_R(F) \cap (S_\alpha \times S_\alpha)) \cup \Delta,$$

则 $S^1_{[\alpha)}$ 是左绝对平坦的，θ 是 $S_{[\alpha)}$ 上的同余. 所以 $S^1_{[\alpha)}/\theta$ 也是左绝对平坦的. 由前面的证明知存在 $w \in S_\alpha$，使得 $\overline{wu_i} = \overline{wv_i}(1 \leqslant i \leqslant m)$，所以 $(wu_i, wv_i) \in \theta_R(F)(1 \leqslant i \leqslant m)$. //

设 S 是带，在 S 上定义如下的偏序：

$$e \leqslant f \Leftrightarrow ef = e = fe.$$

设 $S = \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} S_\alpha$ 是右正则带. 称 S 满足下界条件，如果对任意 $\alpha, \beta \in \Gamma$，$\alpha < \beta$，S_β 的任意有限子集合在 S_α 中有下界.

定理 4.4 设 $S = \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} S_\alpha$ 是右正则带，且 Γ 是链，则 S^1 是左绝对平坦的当且仅当 S 满足下界条件.

证明 设 $\alpha < \beta$，$u_1, u_2, \cdots, u_n \in S_\beta$. 由定理 4.3 知存在 $w \in S_\alpha$，使得 $(wu_1, wu_2), (wu_1, wu_3), \cdots, (wu_1, wu_n) \in \theta_R = \theta_R((u_1, u_2), (u_1, u_3), \cdots, (u_1, u_n))$. 由 $(wu_1, wu_2) \in \theta_R$ 即知

$$wu_1 = c_1s_1,$$
$$d_1s_1 = c_2s_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$d_ms_m = wu_2,$$

其中 $\{c_i, d_i\} \in \{\{u_1, u_i\} \mid 2 \leqslant i \leqslant n\}$，$s_1, \cdots, s_m \in S$. 因为 $wu_1 \in S_\alpha$，$c_1 \in S_\beta$，而 Γ 是链，所以 $s_1 \in S_\alpha$，因此 $c_1s_1 = c_1s_1s_1 = s_1$. 同理，$s_1 = d_1s_1 = c_2s_2 = s_2, \cdots, s_{m-1} = s_m, s_m = wu_2$，所以 $wu_1 = wu_2$. 同理可

证 $wu_1 = wu_3, \cdots, wu_1 = wu_n$. 令 $v = wu_1$，则 $v = vu_i = u_iv(1 \leqslant i \leqslant n)$，所以 v 是 $u_1, \cdots, u_n$ 的下界.

反之设 S 满足下界条件. 设 A 是右 S^1- 系，B 是左 S^1- 系，$a, a' \in A$，$b, b' \in B$，在 $A \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$，则存在 $a_1, \cdots, a_n \in A$，$b_2, \cdots, b_n \in B$，$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S^1$，使得

$$
\begin{aligned}
&a = a_1 s_1, \\
&a_1 t_1 = a_2 s_2, \qquad && s_1 b = t_1 b_2, \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots \\
&a_n t_n = a', && s_n b_n = t_n b'.
\end{aligned}
$$

下面对 n 利用数学归纳法证明在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$.

设 $n = 1$，则有

$$
\begin{aligned}
&a = a_1 s_1, \\
&a_1 t_1 = a', \qquad && s_1 b = t_1 b'.
\end{aligned}
$$

对于任意 $x, y \in S$，令 $z = xyx = yx \in xS \cap yS$，则 $(x, z) \in \lambda(x, y)$. 所以由定理 4.5.12 知任意 S^1- 系都是弱平坦的. 再由引理 5.3.2 知在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$.

设 $n > 1$. 假定 $s_1 \in S_\alpha, t_1 s_2 \cdots t_{n-1} s_n \in S_\beta, t_n \in S_\delta$. 若 $\alpha \geqslant \beta$ 或 $\delta \geqslant \beta$，则类似于定理 5.4.3 的证明可知存在 $i \in \{1, \cdots, n-1\}$，使得 $a_i t_i \in aS \cup a'S$. 所以由归纳假定容易得知结论成立. 因此假定 $\alpha, \delta < \beta$，还不妨假定 $\alpha \geqslant \delta$. 由下界条件可知存在 $w \in S_\alpha$，使得 $wt_1 = ws_2 = \cdots = wt_{n-1} = ws_n = w$（类似于定理 5.4.3 的证明）. 所以有

$$
\begin{aligned}
&a = as_1, \\
&aw = aw, \qquad && s_1 b = wb_n, \\
&at_n = a', && wb_n = t_n b'.
\end{aligned}
$$

这里右边两式的证明为：$s_1 b = ws_1 b = wt_1 b_2 = ws_2 b_2 = \cdots = ws_n b_n = wb_n$，$wb_n = ws_n b_n = wt_n b' = (wt_n) t_n b' = t_n b'$. 所以在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$. //

定理 4.5 设 $S=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}S_\alpha$ 是右正则带，且 Γ 中任意链的元素不超过两个，则 S^1 是左绝对平坦的当且仅当 S 满足定理 4.3 中的条件.

证明 $\Rightarrow$） 由定理 4.3 即得.

$\Leftarrow$） 设 A 是右 S^1- 系，B 是左 S^1- 系，$a,a'\in A$，$b,b'\in B$，在 $A\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$，则存在 $a_1,\cdots,a_n\in A$，$b_2,\cdots,b_n\in B$，$s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S^1$，使得

$$
\begin{aligned}
&a=a_1s_1, \\
&a_1t_1=a_2s_2, \qquad && s_1b=t_1b_2, \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots \\
&a_nt_n=a', && s_nb_n=t_nb'.
\end{aligned}
$$

下面对 n 利用数学归纳法证明在 $(aS\cup a'S)\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$. 若 $n=1$，则由定理 4.4 的证明即得结论. 所以设 $n>1$.

设 $t_1\in S_\alpha$，而 α 是 Γ 中的极小元，则 $s_1t_1\in S_\alpha$. 所以 $t_1=s_1t_1t_1=s_1t_1$，从而 $a_1t_1=a_1s_1t_1=at_1\in aS\cup a'S$. 因此可得到两个个数较少的等式组，由归纳假定即得结论. 所以下设 $t_1\in S_\alpha$，而 α 是 Γ 中的极大元. 若 Γ 中再没有极大元，则 Γ 是链，从而由定理 4.4 知 S^1 是左绝对平坦的. 故设 Γ 中还有极大元 β. 令 $\delta=\alpha\beta$，则 $\delta<\alpha$. 若 $s_1\in S_\alpha$，则由于 S_α 是右零带，所以 $t_1=s_1t_1$，从而 $a_1t_1=a_1s_1t_1=at_1\in aS\cup a'S$. 类似于前面的讨论可知结论成立. 所以假设 $s_1\notin S_\alpha$. 设 i 是最小自然数使得对于任意 $1\leqslant j\leqslant i$，$t_j\in S_\alpha$. 若存在 $1\leqslant j\leqslant i$，使得 $s_{j+1}\in S_\beta$，其中 β 也是 Γ 中的极大元，则 $t_js_{j+1}\in S_{\alpha\beta}=S_\delta$. 由 $a_jt_j=a_{j+1}s_{j+1}$ 得 $a_jt_j=a_{j+1}s_{j+1}=a_jt_js_{j+1}$. 由 δ 的极小性容易得到 $s_jt_js_{j+1}\in S_\delta$，所以 $t_js_{j+1}=s_jt_js_{j+1}$，故 $a_jt_j=a_js_jt_js_{j+1}=a_{j-1}t_{j-1}t_js_{j-1}$. 同理，$t_{j-1}t_js_{j+1}$，$s_{j-1}t_{j-1}t_js_{j+1}\in S_\delta$，所以 $a_jt_j=a_{j-1}s_{j-1}t_{j-1}t_js_{j+1}$. 这样一直做下去就可证明 $a_jt_j\in aS\cup a'S$. 所以由归纳假定容易证明结论成立. 若 β 是极小元，则可类似地证明. 所以可假定 $s_{j+1}\in S_\alpha(1\leqslant j\leqslant i)$. 这样就有 $t_1,s_2,\cdots,t_i,s_{i+1}\in S_\alpha$. 所以由命题 4.2 知存在 $w\in S_\delta$，使得 $a_jwt_j=a_{j+1}ws_{j+1}$，$1\leqslant j\leqslant i$.

故有

$$
\begin{aligned}
&a = a_1 s_1, && \\
&a_1(wt_1) = a_2(ws_2), && s_1 b = (wt_1)b_2, \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots \\
&a_i(wt_i) = a_{i+1}(ws_{i+1}), && (ws_i)b_i = (wt_i)b_{i+1}, \\
&a_{i+1}t_{i+1} = a_{i+2}s_{i+2}, && (ws_{i+1})b_{i+1} = t_{i+1}b_{i+2}, \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots \\
&a_n t_n = a', && s_n b_n = t_n b'
\end{aligned}
$$

(若 $i = n$，则 $a_{n-1}t_{n-1} = a_n s_n = a_n t_n s_n = a's_n \in aS \cup a'S$，故结论也成立. 所以不妨设 $i < n$). 等式 $s_1 b = wt_1 b_2$ 的证明为：$s_1 b = t_1 s_1 b = wt_1 s_1 b = wt_1 b_2$(因为 $s_1 \notin S_\alpha$，所以 $t_1 s_1 \in S_\delta$). 等式 $ws_{i+1}b_{i+1} = t_{i+1}b_{i+2}$ 的证明为：$t_{i+1}b_{i+2} = s_{i+1}b_{i+1} = t_{i+1}s_{i+1}b_{i+1} = wt_{i+1}s_{i+1}b_{i+1} = ws_{i+1}b_{i+1}$(因为 $s_{i+1} \in S_\alpha$，$t_{i+1} \notin S_\alpha$，所以 $t_{i+1}s_{i+1} \in S_\delta$). 因为 $wt_1 \in S_\delta$，$s_1 w \in S_\delta$，所以 $wt_1 = s_1 wwt_1 = s_1 wt_1$，从而 $a_1 wt_1 = a_1 s_1 wt_1 = awt_1 \in aS \cup a'S$. 所以由归纳假定可知结论成立. //

由定理 4.4 知当 Γ 是链时，S^1 是左绝对平坦的当且仅当 S 满足下界条件. 下面给出例子说明对于一般的右正则带，当 S^1 是左绝对平坦幺半群时，S 不一定满足下界条件.

例 4.6 设 $S = S_\alpha \cup S_\beta \cup S_\delta$，这里 $S_\alpha = \{a, b\}$，$S_\beta = \{c\}$，$S_\delta = \{d, e\}$，$\delta = \alpha\beta$. 乘法表如下：

	a	b	c	d	e
a	a	b	d	d	e
b	a	b	e	d	e
c	d	e	c	d	e
d	d	e	d	d	e
e	d	e	e	d	e

S_α 中的元素 $\{a, b\}$ 在 S_δ 中没有下界，所以 S 不满足下界条件. 容易证明 S 满足命题 4.2 中的条件(2). 所以由定理 4.5 即知 S^1 是左绝对平坦幺半群.

§5 全变换半群

设 X 是集合，所有 X 到 X 的映射构成的集合按照映射的合成(从左到右) 构成一个半群，叫做集合 X 上的全变换半群，记为 $\mathscr{T}(X)$.

对于任意 $x \in X$，任意 $s \in \mathscr{T}(X)$，本节中记 x 在 s 下的象为 xs. 对于 $s \in \mathscr{T}(X)$，如下定义 X 上的关系 π_s：

$$x\pi_s y \Leftrightarrow xs = ys, \quad \forall\, x,y \in X,$$

则 π_s 是 X 上的等价关系.

下面是 $\mathscr{T}(X)$ 的基本性质.

命题 5.1 设 $s,t \in \mathscr{T}(X)$，则存在 $u \in \mathscr{T}(X)$，使得 $us = t$ 的充要条件是 $Xt \subseteq Xs$. 此时记为 $t \leqslant_{\mathscr{L}} s$. 所以 $s\mathscr{L}t \Leftrightarrow Xs = Xt$.

证明 若 $us = t$，则 $Xt = X(us) = (Xu)s \subseteq Xs$. 反之设 $Xt \subseteq Xs$. 对于任意 $y \in Xt$，$y \in Xs$. 取定元素 $x_y \in X$，使得 $x_y s = y$. 如下规定 $u \in \mathscr{T}(X)$：对任意 $x \in X$，令 $y = xt \in Xs$，规定 $xu = x_y$. 显然 $xus = x_y s = y = xt$，所以 $us = t$. //

命题 5.2 设 $s,t \in \mathscr{T}(X)$，则存在 $v \in \mathscr{T}(X)$，使得 $sv = t$ 的充要条件是 $\pi_s \subseteq \pi_t$. 此时记为 $t \leqslant_{\mathscr{R}} s$. 所以 $s\mathscr{R}t \Leftrightarrow \pi_s = \pi_t$.

证明 设 $sv = t$. 若 $x,y \in X$，使得 $x\pi_s y$，则 $xs = ys$，所以 $xt = yt$，即 $x\pi_t y$. 反之设 $\pi_s \subseteq \pi_t$. 规定 $v: X \to X$，

$$(xs)v = xt, \qquad \forall\, xs \in Xs$$

$$xv = x, \qquad \forall\, x \in X - Xs.$$

若 $xs = ys$，则 $xt = yt$，所以 v 是映射. 显然 $sv = t$. //

设 $s,t \in \mathscr{T}(X)$，记 $s <_{\mathscr{R}} t$ 为 $s \leqslant_{\mathscr{R}} t$ 但$(s,t) \notin \mathscr{R}$. 同样可定义 $s <_{\mathscr{L}} t$.

引理 5.3 设 X 是集合，$s,t \in \mathscr{T}(X)$ 且 $s \nleqslant_{\mathscr{R}} t$，则存在 $s^* \in V(s)$，$t^* \in V(t)$，使得 $ss^*tt^*s <_{\mathscr{R}} s$.

证明 设 $s \nleqslant_{\mathscr{R}} t$. 由命题 5.2 知存在 $x,y \in X$，使得 $xt = yt$ 但

$xs \neq ys$. 存在 $t^* \in V(t)$，使得 $x(tt^*) = y(tt^*) = x$，又存在 $s^* \in V(s)$，使得 $x(ss^*) = x, y(ss^*) = y$. 令 $s' = ss^*tt^*s$，则 $s' \leqslant_{\mathscr{R}} s$. 又因为 $xs' = ys'$，但 $xs \neq ys$，所以 $\pi_s \neq \pi_{s'}$. 由命题 5.2 即知 $(s, s') \notin \mathscr{R}$. //

设 $S = \mathscr{T}(X)$，A 是左 S-系，B 是右 S-系，$a, a' \in A$，$b, b' \in B$ 满足 $a \otimes b = a' \otimes b'$（在 $A \otimes B$ 中），则存在 $a_1, \cdots, a_n \in A$，$b_2, \cdots, b_n \in B$，$s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$，使得

$$\begin{aligned} &a = a_1 s_1, \\ &a_1 t_1 = a_2 s_2, \qquad && s_1 b = t_1 b_2, \\ &\cdots\cdots && \cdots\cdots \\ &a_n t_n = a', && s_n b_n = t_n b'. \end{aligned}$$

引理 5.4 设 X 是有限集合. 在如上记号下，存在 $c_1, \cdots, c_m \in aS$，$s_1', u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m \in S$，使得

$$\begin{aligned} &a = c_1 u_1, && u_1 b = v_1 b, \\ &c_1 v_1 = c_2 u_2, && u_2 b = v_2 b, \\ &\cdots\cdots && \cdots\cdots \\ &c_{m-1} v_{m-1} = c_m u_m, && u_m b = v_m b, \\ &c_m v_m = a_1 s_1', && s_1' b = t_1 b_2, \\ &s_1' \leqslant_{\mathscr{R}} t_1. \end{aligned}$$

证明 若 $s_1 \leqslant_{\mathscr{R}} t_1$，则有

$$\begin{aligned} &a = a_1 s_1, \qquad && s_1 b = t_1 b_2, \\ &s_1 \leqslant_{\mathscr{R}} t_1. \end{aligned}$$

所以结论成立. 设 $s_1 \not\leqslant_{\mathscr{R}} t_1$，则由命题 5.3 知存在 $s_1^* \in V(s_1)$，$t_1^* \in V(t_1)$，使得 $s_1 s_1^* t_1 t_1^* s_1 <_{\mathscr{R}} s_1$. 令 $s_1' = s_1 s_1^* t_1 t_1^* s_1$，则有

$$\begin{aligned} &a = a(s_1^* s_1), && (s_1^* s_1) b = (s_1^* t_1 t_1^* s_1) b, \\ &a(s_1^* t_1 t_1^* s_1) = a_1 s_1', && s_1' b = t_1 b_2. \end{aligned}$$

这里后两式的证明如下：$a(s_1^* t_1 t_1^* s_1) = a_1 s_1 s_1^* t_1 t_1^* s_1 = a_1 s_1'$；$s_1' b = s_1 s_1^* t_1 t_1^* s_1 b = s_1 s_1^* t_1 t_1^* t_1 b_2 = s_1 s_1^* t_1 b_2 = s_1 s_1^* s_1 b = s_1 b = t_1 b_2$. 若 $s_1' \leqslant_{\mathscr{R}} t_1$，则结论成立. 否则设 $s_1' \not\leqslant_{\mathscr{R}} t_1$. 同上类似的证明过程继续下

去. 因为 X 是有限集合，所以 $\mathscr{T}(X)$ 是有限半群，故总存在自然数 m，使得引理 5.4 成立. //

下面是本节的主要结果.

定理5.5 设 X 是集合，$S=\mathscr{T}(X)$ 是 X 上的全变换半群，则以下三条是等价的：

(1) S 是左绝对平坦幺半群；

(2) 所有左 S- 系是弱平坦的；

(3) X 是有限集合；

证明 (1)⇒(2) 显然.

(3)⇒(1) 设 A 是右 S- 系，B 是左 S- 系，$a,a'\in A$，$b,b'\in B$，在 $A\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$，则存在 $a_1,\cdots,a_n\in A$，$b_2,\cdots,b_n\in B$，$s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$，使得

$$\begin{array}{l|l|l} a=a_1s_1, & & \\ a_1t_1=a_2s_2, & s_1b=t_1b_2, & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ a_nt_n=a', & s_nb_n=t_nb'. & \qquad (*) \end{array}$$

对 n 用数学归纳法证明在 $(aS\cup a'S)\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$.

对等式组 $(*)$ 利用引理 5.4，可得如下的等式组：

$$\begin{array}{ll} c_mv_m=a_1s_1', & \\ a_1t_1=a_2s_2, & s_1'b=t_1b_2, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_nt_n=a', & s_nb_n=t_nb'. \end{array}$$

又由引理 5.4 知在 $(aS\cup a'S)\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a_1s_1'\otimes b=c_mv_m\otimes b$. 所以不失一般性，可以假定 $s_1\leqslant_{\mathscr{R}}t_1$.

设 $n=1$. 此时有

$$\begin{array}{ll} a=a_1s_1, & \\ a_1t_1=a', & s_1b=t_1b'. \end{array}$$

因为 $s_1\leqslant_{\mathscr{R}}t_1$，所以由命题 5.2 知存在 $u\in S$，使得 $s_1=t_1u$. 因此有

$$a = a'(t_1^* t_1 u),$$

$$a'(t_1^* t_1) = a', \qquad (t_1^* t_1 u)b = (t_1^* t_1)b',$$

这里不显然的两个等式的证明为：$a = a_1 s_1 = a_1 t_1 u = a_1 t_1 t_1^* t_1 u = a'(t_1^* t_1 u)$；$(t_1^* t_1 u)b = t_1^* s_1 b = t_1^* t_1 b'$. 所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$.

设$n \geqslant 2$. 记

$$m = \sum_{i=1}^{n} |Xs_i| + \sum_{i=1}^{n} |Xt_i|,$$

显然$m \geqslant 2n$. 下面对m用数学归纳法.

设$m = 2n$. 此时s_i, t_i皆为X上的常值映射，所以有$a = (a_1 s_1)s_1$，$(a_i s_i)t_i = a_i t_i = a_{i+1}s_{i+1} = (a_{i+1}s_{i+1})s_{i+1}$，$1 \leqslant i \leqslant n-1$，$(a_n s_n)t_n = a'$. 因此将等式组（ * ）中的$a_i$换成$a_i s_i (i = 1, \cdots, n)$，就可得到两个个数较少的等式组（例如前两行等式一组，后$2n-1$个等式一组）. 由归纳假定容易证明结论成立.

设$m > 2n$. 先证明几个引理.

引理 5.6 设存在$1 \leqslant i \leqslant n-1$，使得$s_i \leqslant_{\mathscr{R}} t_i$，$s_{i+1} \leqslant_{\mathscr{L}} t_i$，则结论成立（即在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$）.

证明 由条件知$s_i = t_i u = t_i t_i^* t_i u = t_i t_i^* s_i$，$s_{i+1} = v t_i = v t_i t_i^* t_i = s_{i+1} t_i^* t_i$，这里$t_i^* \in V(t_i)$. 所以有$a_{i-1}t_{i-1} = a_i s_i = a_i t_i t_i^* s_i = a_{i+1}s_{i+1}t_i^* s_i = a_{i+1}(s_{i+1}t_i^* s_i)$，$(s_{i+1}t_i^* s_i)b_i = s_{i+1}t_i^* t_i b_{i+1} = s_{i+1}b_{i+1} = t_{i+1}b_{i+2}$. 因此（ * ）中的等式组

$$\begin{aligned} & a_{i-1}t_{i-1} = a_i s_i, & & \\ & a_i t_i = a_{i+1}s_{i+1}, & & s_i b_i = t_i b_{i+1}, \\ & a_{i+1}t_{i+1} = a_{i+2}s_{i+2}, & & s_{i+1}b_{i+1} = t_{i+1}b_{i+2} \end{aligned} \qquad (**)$$

可用如下等式组来代替：

$$\begin{aligned} & a_{i-1}t_{i-1} = a_{i+1}(s_{i+1}t_i^* s_i), & & \\ & a_{i+1}t_{i+1} = a_{i+2}s_{i+2}, & & (s_{i+1}t_i^* s_i)b_i = t_{i+1}b_{i+2}. \end{aligned}$$

在上述讨论中，当$i = 1$时，$a_{i-1}t_{i-1} = a$，当$i = n-1$时，$b_{i+2} = b'$. 所以由归纳假定即知在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$.

//

引理 5.7 设存在 $1 \leqslant i \leqslant n-1$，使得 $s_i <_{\mathscr{R}} t_i \not\leqslant_{\mathscr{L}} s_{i+1}$，则结论成立.

证明 由 $t_i \not\leqslant_{\mathscr{L}} s_{i+1}$ 知存在 $x \in X$，使得 $xt_i \in X - Xs_{i+1}$. 若 $|Xt_i| = 1$，则对任意 $x, y \in X$，$xt_i = yt_i$. 又因为 $s_i <_{\mathscr{R}} t_i$，所以 $\pi_{t_i} \subseteq \pi_{s_i}$. 因此对任意 $x, y \in X$，有 $xs_i = ys_i$. 即 $|Xs_i| = 1$. 所以 $t_i \mathscr{R} s_i$. 这与 $s_i <_{\mathscr{R}} t_i$ 矛盾. 因此 $|Xt_i| \geqslant 2$. 所以存在 $y \in X$，使得 $xt_i \neq yt_i$. 记 $x\pi_{t_i} = \{z \in X \mid xt_i = zt_i\}$. 定义 $u, v \in \mathscr{T}(X)$ 如下：

$$wu = \begin{cases} y, & w \in x\pi_{t_i}, \\ w, & \text{否则}, \end{cases} \qquad \forall\, w \in X,$$

$$wv = \begin{cases} yt_i, & w = xt_i, \\ w, & \text{否则}, \end{cases} \qquad \forall\, w \in X.$$

显然 $ut_i = t_i v$. 所以 $a_i(ut_i) = a_i t_i v = a_{i+1}s_{i+1}v = a_{i+1}s_{i+1} = a_i t_i$(由 V 的定义及 $xt_i \in X - Xs_{i+1}$ 知 $s_{i+1}v = s_{i+1}$). 又因为 $s_i <_{\mathscr{R}} t_i$，所以存在 $w \in S$，使得 $t_i w = s_i$，因此 $a_{i-1}t_{i-1} = a_i s_i = a_i t_i w = a_{i+1}s_{i+1}w = a_{i+1}s_{i+1}vw = a_i t_i vw = a_i u t_i w = a_i(us_i)$；且 $(us_i)b_i = u(s_i b_i) = u(t_i b_{i+1}) = (ut_i)b_{i+1}$，故等式组(* *)中的前两行等式可用如下等式组来代替：

$$a_{i-1}t_{i-1} = a_i(us_i),$$
$$a_i(ut_i) = a_{i+1}s_{i+1}, \qquad (us_i)b_i = (ut_i)b_{i+1}.$$

和引理 5.6 的证明一样，若 $i = 1$，则 $a_{i-1}t_{i-1} = a$，$b_1 = b$. 显然 $|Xut_i| \leqslant |Xt_i|$. 又 $xut_i = yt_i = yut_i$，而 $xt_i \neq yt_i$，所以 $|Xut_i| \lneqq |Xt_i|$. 因此由对 m 的归纳假定知在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$. //

引理 5.8 设存在 $1 \leqslant i \leqslant n-1$，使得 $t_i \leqslant_{\mathscr{L}} s_{i+1}$，$t_{i+1} \leqslant_{\mathscr{R}} s_{i+1}$，则结论成立.

证明 由条件有 $t_i = us_{i+1} = us_{i+1}s_{i+1}^* s_{i+1} = t_i s_{i+1}^* s_{i+1}$，$t_{i+1} = s_{i+1}v = s_{i+1}s_{i+1}^* s_{i+1}v = s_{i+1}s_{i+1}^* t_{i+1}$，所以等式组(* *)可用如下的等式组来代替：

$$a_{i-1}t_{i-1} = a_i s_i,$$

$$a_i(t_i s^*_{i+1} t_{i+1}) = a_{i+2} s_{i-2}, \qquad s_i b_i = (t_i s^*_{i+1} t_{i+1}) b_{i+2},$$

后两个等式的证明如下：$a_i(t_i s^*_{i+1} t_{i+1}) = a_i t_i s^*_{i+1} t_{i+1} = a_{i+1} s_{i+1} s^*_{i+1} t_{i+1}$ $= a_{i+1} t_{i+1} = a_{i+2} s_{i+2}$；$s_i b_i = t_i b_{i+1} = t_i s^*_{i+1} s_{i+1} b_{i+1} = (t_i s^*_{i+1} t_{i+1}) b_{i+2}$. 所以由归纳假定即知结论成立. //

引理 5.9 设存在 $1 \leqslant i \leqslant n-1$，使得 $t_i \leqslant_{\mathscr{L}} s_{i+1} \not\leqslant_{\mathscr{R}} t_{i+1}$，则结论成立.

证明 因为 $s_{i+1} \not\leqslant_{\mathscr{R}} t_{i+1}$，所以由引理 5.3 知存在 $s^*_{i+1} \in V(s_{i+1})$，$t^*_{i+1} \in V(t_{i+1})$，使得

$$s_{i+1} s^*_{i+1} t_{i+1} t^*_{i+1} s_{i+1} <_{\mathscr{R}} s_{i+1}.$$

令 $u = s_{i+1} s^*_{i+1} t_{i+1} t^*_{i+1} s_{i+1}$，$v = t_i s^*_{i+1} t_{i+1} t^*_{i+1} s_{i+1}$，则有

$$a_{i-1} t_{i-1} = a_i s_i,$$

$$a_i v = a_{i+1} u, \qquad s_i b_i = v b_{i+1},$$

$$a_{i+1} t_{i+1} = a_{i+2} s_{i+2}, \qquad u b_{i+1} = t_{i+1} b_{i+2},$$

这里，当 $i = n-1$ 时，规定 $b_{i+2} = b'$，$a_{i+2} s_{i+2} = a'$，当 $i = 1$ 时作同前一样的规定. 不明显的三个等式的证明如下：

$$\begin{aligned} a_i v &= a_i (t_i s^*_{i+1} t_{i+1} t^*_{i+1} s_{i+1}) \\ &= a_{i+1} s_{i+1} s^*_{i+1} t_{i+1} t^*_{i+1} s_{i+1} \\ &= a_{i+1} u; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_i b_i &= t_i b_{i+1} = t_i s^*_{i+1} s_{i+1} b_{i+1} \qquad\qquad (t_i \leqslant_{\mathscr{L}} s_{i+1}) \\ &= t_i s^*_{i+1} t_{i+1} b_{i+2} \\ &= t_i s^*_{i+1} t_{i+1} t^*_{i+1} t_{i+1} b_{i+2} \\ &= t_i s^*_{i+1} t_{i+1} t^*_{i+1} s_{i+1} b_{i+1} \\ &= v b_{i+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u b_{i+1} &= s_{i+1} s^*_{i+1} t_{i+1} t^*_{i+1} s_{i+1} b_{i+1} \\ &= s_{i+1} s^*_{i+1} t_{i+1} t^*_{i+1} t_{i+1} b_{i+2} \\ &= s_{i+1} s^*_{i+1} t_{i+1} b_{i+2} \\ &= s_{i+1} s^*_{i+1} s_{i+1} b_{i+1} \\ &= s_{i+1} b_{i+1} = t_{i+1} b_{i+2}. \end{aligned}$$

由 u, v 的定义知有 $|Xu| \leqslant |Xs_{i+1}|$，$|Xv| \leqslant |Xt_i|$. 又因为 u

$<_{\mathscr{R}} s_{i+1}$，所以 $\pi_{s_{i+1}} \subseteq \pi_u$，但 $(u, s_{i+1}) \notin \mathscr{R}$. 故由命题 5.2 知存在 x, $y \in X$，使得 $xu = yu$ 但 $xs_{i+1} \neq ys_{i+1}$. 这说明 $|Xu| \neq |Xs_{i+1}|$. 所以由对 m 的归纳假定知结论成立. //

引理 5.10 若 $s_1 \mathscr{R} t_1$，则结论成立.

证明 因为 $s_1 \mathscr{R} t_1$，所以存在 $u \in S$，使得 $t_1 = s_1 u$，故 $a_1 t_1 = a_1 s_1 u = au \in aS$，从而结论成立. //

定理 5.5 的证明(续) 由引理 5.10，可以假定 $s_1 <_{\mathscr{R}} t_1$. 若 $t_1 \nleqslant_{\mathscr{L}} s_2$，则由引理 5.7 知结论成立. 故设 $t_1 \leqslant_{\mathscr{L}} s_2$. 若 $t_1 \mathscr{L} s_2$，则 $s_2 \leqslant_{\mathscr{L}} t_1$，所以由引理 5.6 知结论成立. 所以可以假设 $t_1 <_{\mathscr{L}} s_2$. 同样由引理 5.8，5.9 可知只需考虑 $s_2 <_{\mathscr{R}} t_2$ 的情形. 上述讨论继续下去，可以假设 $s_n <_{\mathscr{R}} t_n$. 由引理 5.4 知存在 $t_n' \in S$，$c_1, \cdots. c_q \in a'S$，u_1, $v_1, \cdots, u_q, v_q \in S$，使得

$$
\begin{aligned}
&a' = c_1 u_1, && u_1 b' = v_1 b',\\
&c_1 v_1 = c_2 u_2, && u_2 b' = v_2 b',\\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots\\
&c_{q-1} v_{q-1} = c_q v_q, && u_q b' = v_q b',\\
&c_q v_q = a_n t_n', && t_n' b' = s_n b_n,\\
&t_n' \leqslant_{\mathscr{R}} s_n.
\end{aligned}
$$

所以有如下的等式组：

$$
\begin{aligned}
&a = a_1 s_1, && \\
&a_1 t_1 = a_2 s_2, && s_1 b = t_1 b_2,\\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots\\
&a_{n-1} t_{n-1} = a_n s_n, && s_{n-1} b_{n-1} = t_{n-1} b_n,\\
&a_n t_n' = a_n t_n', && s_n b_n = t_n' b'.
\end{aligned}
$$

因为 $t_n' \leqslant_{\mathscr{R}} s_n <_{\mathscr{R}} t_n$，所以 $|Xt_n'| < |Xt_n|$. 由归纳假定即知在 $(aS \cup a_n t_n' S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a_n t_n' \otimes b'$. 而 $a_n t_n' = c_q v_q \in a'S$，所以在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a_n t_n' \otimes b'$. 又有 $a' \otimes b' = a_n t_n' \otimes b'$（在 $a'S \otimes B$ 中），所以在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$.

(2)⇒(3) 设 X 是无限集合，$\sigma: X \to \mathbb{Z}$ 是任意满射. 令 $X_i = \sigma^{-1}(\{2i, 2i+1\})$，$Y_i = \sigma^{-1}(\{2i-1, 2i\})$，$i \in \mathbb{Z}$，则 X_i, Y_i 满足下述条件：

(i) $X_i \subseteq Y_i \cup Y_{i+1}$，$Y_i \subseteq X_{i-1} \cup X_i$，$\forall\, i \in \mathbb{Z}$，

(ii) $X_i \cap Y_{i+1} \neq \varnothing$，$X_i \cap Y_i \neq \varnothing$，$\forall\, i \in \mathbb{Z}$.

任意固定 $x_i \in X_i$，$y_i \in Y_i$，$i \in \mathbb{Z}$，如下定义 $\alpha, \beta \in S$：

$$x\alpha = x_i, \qquad \text{如果 } x \in X_i,$$

$$x\beta = y_i, \qquad \text{如果 } x \in Y_i,$$

容易证明(利用(ii))有 $\mathrm{Ker}\alpha \vee \mathrm{Ker}\beta = X \times X$，所以 $\alpha S \cap \beta S$ 中的元素都是常值映射. 如果所有 S- 系都是弱平坦的，则由定理 4.5.12 知存在 $s \in \alpha S \cap \beta S$，使得 $(s, \alpha) \in \lambda(\alpha, \beta)$，这里 $\lambda(\alpha, \beta)$ 是 S 上的由 (α, β) 生成的最小左同余. 因为 $s \neq \alpha$，所以存在 $t_1, \cdots, t_n$，$u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S$，使得

$$s = t_1 u_1, t_1 v_1 = t_2 u_2, \cdots, t_{n-1} v_{n-1} = t_n u_n, t_n v_n = \alpha,$$

且 $\{u_i, v_i\} = \{\alpha, \beta\}$，$1 \leqslant i \leqslant n$.

引理 5.11 对任意 $t \in S$，$|Xtu_i| = \infty$ 当且仅当 $|Xtv_i| = \infty$.

证明 若 $|Xt\alpha| = \infty$，则 Xt 和无穷多个 X_i 有交，所以由(i)知 Xt 和无穷多个 Y_i 有交，故 $|Xt\beta| = \infty$. 反之，若 $|Xt\beta| = \infty$，则同样的讨论可知 $|Xt\alpha| = \infty$. 注意到 $\{u_i, v_i\} = \{\alpha, \beta\}$，结论即得证.

定理 5.5 的证明（又续） $|X\alpha| = \infty \Rightarrow |Xt_n v_n| = \infty \Rightarrow |Xt_n u_n| = \infty \Rightarrow |Xt_{n-1} v_{n-1}| = \infty \Rightarrow \cdots \Rightarrow |Xt_1 v_1| = \infty \Rightarrow |Xt_1 u_1| = \infty \Rightarrow |Xs| = \infty$. 这与 $s \in \alpha S \cap \beta S$ 矛盾. 所以 X 是有限集合. //

定理 5.5 中的(1)⇔(3) 是 Shoji[148] 中的结果，Shoji[151] 中又对该结果进行了推广.

第七章　正则性

§1　正则 S-系

定义 1.1　设 A 是 S- 系，$a \in A$，称 a 是 A 中的正则元，如果存在 S- 同态 $f:Sa \to S$，使得

$$f(a)a = a.$$

设 S 是正则幺半群，$s \in S$，则存在 $s' \in S$，使得 $s = ss's$. 作映射 $f:Ss \to S$ 为 $f(ts) = tss'$. 容易证明 f 是 S- 同态，且 $f(s)s = ss's = s$，所以 s 是左 S- 系 ${}_SS$ 中的正则元.

注意幺半群 S 中的正则元和左 S- 系 ${}_SS$ 中的正则元是不一致的，前者是指 von Neumann 正则，后者是指定义 1.1 意义下的正则.

下面是 S- 系的正则元的基本性质.

命题 1.2　设 A 是 S- 系，$a \in A$. 以下三条等价：

(1) a 是 A 中的正则元；

(2) 存在 $e \in E(S)$，使得 $ea = a$，且对任意 $p, q \in S$，若 $pa = qa$，则 $pe = qe$；

(3) Sa 是投射 S- 系.

证明　(1)⇒(2)　设 $f:Sa \to S$ 是 S- 同态且满足 $f(a)a = a$，记 $e = f(a) \in S$，则 $f(a) = f(f(a)a) = f(a)f(a)$，所以 $e \in E(S)$. 显然 $ea = a$. 设 $p, q \in S$，使得 $pa = qa$，则

$$pe = pf(a) = f(pa) = f(qa) = qf(a) = qe.$$

(2)⇒(3)　作映射 $\varphi:Sa \to Se$ 如下：

$$\varphi(sa) = se, \quad \forall\, s \in S,$$

则由条件(2)易知 φ 是有定义的. 若 $se = te$，则 $sa = sea = tea = ta$，

所以φ是单的. 显然φ是S-满同态. 所以$\varphi: Sa \to Se$是同构,因此Sa是投射的.

(3)⇒(1) 设Sa是投射的,则存在S-同构$\varphi: Sa \to Se$,其中$e \in E(S)$. 设$\varphi(a) = s, \varphi(ta) = e$,则$ets = et\varphi(a) = e\varphi(ta) = e \cdot e = e$,所以$setset = seet = set$,即$set \in E(S)$. 令$g = set$. 作映射$\alpha$: $Sa \to Sg$为$\alpha(xa) = xg$. 若$xa = ya$,则$xs = ys$,所以$xg = yg$. 这说明α是有定义的. 显然α是S-同态,且$\alpha(a) = g$. 设$xg = yg$,则$xa = x\varphi^{-1}(s) = x\varphi^{-1}(se) = xse\varphi^{-1}(e) = xseta = xga = yga = yseta = yse\varphi^{-1}(e) = y\varphi^{-1}(se) = y\varphi^{-1}(s) = ya$,所以$\alpha$是单的,从而$\alpha$是$S$-同构. 因为

$$\alpha(\alpha(a)a) = \alpha(a)\alpha(a) = g \cdot g = g = \alpha(a),$$

所以$\alpha(a)a = a$. 这说明a是A中的正则元. //

定义 1.3 设A是S-系,如果A中的所有元素都是A的正则元,则称A是正则S-系.

命题 1.2 的一个显然推论是

推论 1.4 S-系A是正则的当且仅当A的任意循环子系是投射的.

下面给出正则S-系的一些例子.

例 1.5 (1) 若S是正则幺半群,则${}_SS$是正则S-系.

(2) 设S是右可消幺半群,则容易证明${}_SS$也是正则S-系. 实际上由下面的命题 1.6 可知此时任意投射S-系都是正则的.

(3) 设X是集合,$\mathscr{T}(X)$是X上的全变换幺半群. 设$x \in X$,作映射$c_x: X \to X, c_x(y) = x, \forall\ y \in X$,则$c_x \in E(\mathscr{T}(X))$. 容易证明$\mathscr{T}(X)x \simeq \mathscr{T}(X)c_x$,所以$\mathscr{T}(X)x$是投射$\mathscr{T}(X)$-系,从而由推论 1.4 知$X$是正则$\mathscr{T}(X)$-系.

(4) 设$S = \{1, 0, u, v, w\}$,非平凡部分乘法表为

	u	v	w
u	0	0	0
v	u	v	w
w	u	v	w

可以证明S是幺半群. 显然$u \in S$既不是S的右可消元,也不是

von Neumann 正则元. 但左 S- 系$_SS$ 是正则的. 这是因为:首先 1, 0,v,w 都是$_SS$ 的正则元(因为它们都是幺半群 S 的正则元). 显然 $vu = u$. 设 $x,y \in S$,使得 $xu = yu$,则由乘法表容易看出有 $xv = yv$. 所以由命题 1.2 知 u 也是$_SS$ 的正则元,从而$_SS$ 是正则 S- 系.

命题 1.6 正则 S- 系的任意子系仍是正则系. 正则 S- 系的余直积仍是正则系.

证明 由定义及命题 1.2 即得. //

设 A 是 S- 系,$a \in A$. 引进如下记号:

$$\underline{M}_a = \{e \in E(S) \mid ea = a, \text{且对任意 } x,y \in S, xa = ya \Rightarrow xe = ye\}$$
$$= \{e \in E(S) \mid a \text{ 是 } e\text{- 可消的}\}.$$

由命题 1.2 即得

命题 1.7 S- 系 A 是正则的当且仅当对任意 $a \in A$,$\underline{M}_a \neq \varnothing$.

设 $a \in A$,若 $e \in \underline{M}_a$,则称 $\{a,e\}$ 是 A 的一个正则对. 下面是正则对的性质.

命题 1.8 设 $a \in A$,$\{a,e\}$ 和 $\{a,e'\}$ 都是正则对,则有

(1) $ee' = e'$,$e'e = e$;

(2) $e\mathscr{R}e'$.

证明 因为 $ea = a = 1 \cdot a$,所以由正则对 $\{a,e'\}$ 的性质可知有 $ee' = e'$. 同理可证 $e'e = e$. 由(1) 即可得到(2). //

S- 系 A 称为是强忠实的,如果对任意 $s,t \in S$,任意 $a \in A$,$sa = ta \Rightarrow s = t$. 例如,若 S 是右可消幺半群,则$_SS$ 是强忠实 S- 系. 事实上,有:S 是右可消幺半群当且仅当存在强忠实左 S- 系. 这是因为:设 A 是强忠实 S- 系,$s,t,c \in S$ 满足 $sc = tc$. 任取 $a \in A$,则有 $sca = tca$. 由 A 的强忠实性即得 $s = t$,即 S 是右可消的.

可以用条件(P) 及相对平坦性给出强忠实系的特征刻画,见 §5.

强忠实系与正则系的关系是:

命题 1.9 强忠实系是正则系.

证明 设 A 是强忠实 S- 系,$a \in A$,则 $\{a,1\}$ 是 A 的正则

对. //

命题 1.9 的逆不成立. 例如令 S 是 von Neumann 正则幺半群但不是右可消的，则${}_SS$ 是正则系但不是强忠实系.

例 5.2.5 和例 5.2.7 说明条件 $|E(S)|=1$ 不能保证所有平坦 S- 系满足条件(P). 然而利用正则系的概念有

定理 1.10[109] 设存在正则右 S- 系，则以下三条是等价的：

(1) 所有平坦左 S- 系满足条件(P)；

(2) 对 S 的任意真左理想 J，存在 $j \in J - jJ$；

(3) $|E(S)|=1$.

证明 (3)⇒(1) 设 A 是正则右 S- 系，$a \in A$，$s,t \in S$ 满足 $as=at$. 由 A 的正则性可知存在 $e \in E(S)$，使得 $\{a,e\}$ 是 A 的正则对. 所以 $es=et$. 由条件 $|E(S)|=1$ 即可知 $e=1$. 所以 $s=t$. 这说明 A 是强忠实右 S- 系，所以 S 是左可消幺半群. 因此由定理 5.2.9 知任意平坦左 S- 系满足条件(P).

其他结论由命题 5.2.1，5.2.2 和定理 5.2.3 即得. //

定理 1.10 也说明存在无正则左 S- 系的幺半群 S.

例 1.11 令 S 为例 5.2.7 中构造的幺半群，则 $|E(S)|=1$，但存在不满足条件(P) 的平坦右 S- 系，所以由定理 1.10 即知不存在正则左 S- 系.

下面是正则系的一个简单性质.

命题 1.12 正则 S- 系一定满足条件(E).

证明 由命题 1.2 即得. //

命题 1.12 的逆不成立，例如取幺半群 S，使得正则 S- 系不存在，则 S 不是群，从而有真左理想 J. 由命题 5.2.1 知 $A(J)$ 满足条件(E)，但 $A(J)$ 不是正则系.

正则系已有各种形式的推广，请参看[118] 和[115].

§2 正则系的平坦性

本节主要考虑所有正则系是平坦系的幺半群，以及其他相关的问题.

例 1.11 说明对于某些幺半群 S，不存在正则左 S- 系. 显然在本节中只需考虑存在正则系的幺半群.

命题 2.1 设存在正则 S- 系，则 S 中有一个最大的正则左理想.

证明 设 A 是正则 S- 系，$a \in A$，则由命题 1.2 知有 S- 同构 $Sa \to Se, e \in E(S)$. 由命题 1.6 知 Sa 是正则 S- 系，所以 Se 也是正则 S- 系. 这说明 S 中有正则左理想.

令 T 为 S 的所有正则左理想的并，则由命题 1.6 知 T 也是正则的. 显然 T 还是最大的正则左理想. //

以下总是以 $T(S)$ 表示 S 的最大正则左理想.

定理 2.2[110] 对于幺半群 S，以下几条等价：

(1) 所有正则 S- 系是平坦的；

(2) 所有正则 S- 系是弱平坦的；

(3) 所有正则 S- 系是主弱平坦的；

(4) 对任意 $s \in S$，任意 $e^2 = e \in T(S)$，se 是 S 的 von Neumann 正则元.

证明 (1)⇒(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(4) 设 $s \in S, e^2 = e \in T(S)$. 如果 $Sse = Se$，则存在 $t \in S$，使得 $tse = e$，所以 $se = setse$，即 se 是正则元. 下设 $Sse \neq Se$.

类似于 $A(I)$ 的定义构造 S- 系 M 如下：

$$M = \{(te, x) \mid te \in Se - Sse\}$$

$$\bigcup \{(te,y) \mid te \in Se - Sse\}$$
$$\bigcup \{(te,z) \mid te \in Sse\},$$

这里 x,y,z 是三个符号. 规定 S 在 M 上的左作用为

$$r(te,w) = \begin{cases} (rte,w), & rte \in Se - Sse, \\ (rte,z), & rte \in Sse, \end{cases} \quad w \in \{x,y\},$$

$$r(te,z) = (rte,z).$$

容易验证 M 按照上述定义构成一个 S- 系. 显然有 S- 系同构 $S(e,x) \simeq Se \simeq S(e,y)$. 由于 $Se \leqslant T(S)$, 所以由命题 1.6 知 Se 是正则系, 从而 $S(e,x), S(e,y)$ 也是正则系. 再由命题 1.6 知 $M = S(e,x) \cup S(e,y)$ 也是正则系. 从而由条件知 M 是主弱平坦的.

因为 $se(e,x) = (se,z) = se(e,y)$, 所以由 M 的主弱平坦性知在 $seS \otimes M$ 中有 $se \otimes (e,x) = se \otimes (e,y)$, 因此存在 $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n \in S, a_1,\cdots,a_n \in M, u_2,\cdots,u_n \in seS$, 使得

$$\begin{aligned} & & (e,x) &= s_1a_1, \\ ses_1 &= u_2t_1, & t_1a_1 &= s_2a_2, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ u_ns_n &= set_n, & t_na_n &= (e,y). \end{aligned}$$

设 $a_i = (p_i,w_i)$, 其中 $p_i \in S, w_i \in \{x,y,z\}$. 由上述等式组可知存在某个 i, 使得 $w_i = z$, 因此 $t_ip_i \in Sse$. 所以有: $se = se(s_1p_1) = (ses_1)p_1 = u_2t_1p_1 = u_2s_2p_2 = \cdots = u_is_ip_i = u_{i+1}t_ip_i \in u_{i+1}Sse$. 又因为 $u_{i+1} \in seS$, 所以 $se \in seSse$, 即 se 是正则元.

(4)⇒(1) 设 B 是正则 S- 系, A 是任意右 S- 系, $a,a' \in A$, $b,b' \in B$, 在 $A \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$. 所以存在 $a_1,\cdots,a_n \in A$, $b_2,\cdots,b_n \in B, s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n \in S$, 使得

$$\begin{aligned} a &= a_1s_1, \\ a_1t_1 &= a_2s_2, & s_1b &= t_1b_2, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_n t_n = a', & s_n b_n = t_n b'. \end{array}$$

记 $b_1 = b, b_{n+1} = b'$. 因为 $b_1, \cdots, b_{n+1}$ 是 B 中的正则元，所以由命题 1.2 知存在 $e_1, \cdots, e_{n+1} \in E(S)$，使得 $\{b_1, e_1\}, \cdots, \{b_{n+1}, e_{n+1}\}$ 是 B 的正则对. 因此有如下的等式组：

$$\begin{array}{ll} ae_1 = a_1 s_1 e_1, & \\ a_1 t_1 e_2 = a_2 s_2 e_2, & s_1 e_1 b = t_1 e_2 b_2, \\ a_2 t_2 e_3 = a_3 s_3 e_3, & s_2 e_2 b_2 = t_2 e_3 b_3, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_n t_n e_{n+1} = a' e_{n+1}, & s_n e_n b_n = t_n e_{n+1} b'. \end{array}$$

下面对 n 用数学归纳法证明在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$.

设 $n = 1$，则有

$$\begin{array}{ll} ae_1 = a_1 s_1 e_1, & \\ a_1 t_1 e_2 = a' e_2, & s_1 e_1 b = t_1 e_2 b'. \end{array}$$

由命题 2.1 的证明知 Se_1 是正则左理想，所以 $e_1 \in T(S)$. 由条件可知 $s_1 e_1$ 是正则元，故存在 $u \in S$，使得 $s_1 e_1 = s_1 e_1 u s_1 e_1$. 所以

$$t_1 b' = s_1 b = s_1 e_1 b = s_1 e_1 u s_1 e_1 b = s_1 e_1 u s_1 b = s_1 e_1 u t_1 b'.$$

因为 $\{b', e_2\}$ 是正则对，所以有 $t_1 e_2 = s_1 e_1 u t_1 e_2$. 因此在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有

$$\begin{aligned} a \otimes b &= a \otimes e_1 b = ae_1 \otimes b = a_1 s_1 e_1 \otimes b \\ &= a_1 s_1 e_1 u s_1 e_1 \otimes b = a_1 s_1 e_1 u \otimes s_1 e_1 b \\ &= a_1 s_1 e_1 u \otimes t_1 e_2 b' = a_1 s_1 e_1 u t_1 e_2 \otimes b' \\ &= a_1 t_1 e_2 \otimes b' = a' e_2 \otimes b' = a' \otimes e_2 b' \\ &= a' \otimes b'. \end{aligned}$$

设 $n \geqslant 2$. 因为 $Se_1 \simeq Sb_1$ 是正则系，所以 $e_1 \in T(S)$. 因此存在 $s_1' \in S$，使得 $s_1 e_1 = s_1 e_1 s_1' s_1 e_1$. 从 $s_1 b = t_1 b_2$ 可得

$$t_1b_2 = s_1b = s_1e_1b = s_1e_1s_1's_1e_1b = s_1e_1s_1't_1b_2.$$

由于$\{b_2,e_2\}$是正则对，所以有$t_1e_2 = s_1e_1s_1't_1e_2$. 由归纳假定可知在$(a_1t_1e_2S \cup a'e_{n+1}S) \otimes B$中有$a_1t_1e_2 \otimes b_2 = a'e_{n+1} \otimes b'$(利用框线内的等式组). 因为

$$a_1t_1e_2 = a_1s_1e_1s_1't_1e_2 = ae_1s_1't_1e_2 \in aS,$$

所以在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有

$$a' \otimes b' = a' \otimes e_{n+1}b' = a'e_{n-1} \otimes b' = a_1t_1e_2 \otimes b_2.$$

对于前两行的等式组，利用归纳假定可知在$(aS \cup a_2s_2e_2S) \otimes B$中有$ae_1 \otimes b = a_2s_2e_2 \otimes b_2$. 由于$a_2s_2e_2 = a_1t_1e_2 \in aS$，所以在$(aS \cup a'S)$中有$a \otimes b = a \otimes e_1b = ae_1 \otimes b = a_2s_2e_2 \otimes b_2$.

结合前面的结果即知在$(aS \cup a'S) \otimes B$中有$a \otimes b = a' \otimes b'$. 因此$B$是平坦的. //

推论 2.3 对于幺半群S，以下两条等价：

(1) S是正则幺半群；

(2) S是左PP幺半群，且所有正则S-系是平坦(弱平坦，主弱平坦)的.

证明 S是左PP幺半群当且仅当${}_SS$是正则S-系，当且仅当$T(S) = S$. 所以由定理2.2即得本推论. //

定理 2.4 对于幺半群S，以下两条等价：

(1) 所有正则S-系是挠自由的；

(2) 对于S的任意左可消元r，任意$e^2 = e \in T(S)$，有$re\mathscr{L}e$.

证明 (1)⇒(2) 设r是左可消元，$e^2 = e \in T(S)$. 假定$Sre \neq Se$，则类似于定理2.2的证明构造S-系M. 因为M是正则系，所以由条件便知M是挠自由的. 显然有

$$r(e,x) = (re,z) = r(e,y),$$

所以由M的挠自由性即知$(e,x) = (e,y)$. 矛盾. 这说明$Sre = Se$，即$re\mathscr{L}e$.

(2)⇒(1) 设 A 是正则 S- 系，$a,b\in A$，$r\in S$ 是左可消元，满足 $ra=rb$. 因为 A 是正则的，所以存在 $e,f\in E(S)$，使得 $\{a,e\}$，$\{b,f\}$ 是正则对. 因此 $rea=rfb$. 由于 $e\in T(S)$，所以 $re\mathscr{L}e$，故存在 $t\in S$，使得 $tre=e$. 因此

$$a=ea=trea=trfb.$$

所以

$$rb=ra=r(trfb)=rtrfb.$$

由正则对 $\{b,f\}$ 的性质可知有

$$rf=rtrf.$$

所以 $f=trf$(r 是左可消元). 故

$$a=(trf)b=fb=b,$$

即 A 是挠自由的. //

定理 2.5 对于幺半群 S，以下几条等价：

(1) 所有正则 S- 系是投射的；

(2) 所有正则 S- 系是强平坦的；

(3) 所有正则 S- 系满足条件(P)；

(4) 对任意 $e^2=e\in T(S)$，Se 是 S 的极小左理想.

证明 (1)⇒(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(4) 设 $e^2=e\in T(S)$，则 Se 是 S 的左理想. 设 I 是 S 的左理想且 $I\leqslant Se$，$I\neq Se$. 类似于定理 2.2 的证明构造正则 S- 系 M，由条件知 M 满足条件(P). 由命题 4.2.7 知 M 是循环子系的不交并. 但这是不可能的，因为 $S(e,x)\cap S(e,y)=\{(se,z)\mid se\in I\}$. 所以 Se 是极小左理想.

(4)⇒(1) 设 A 是正则 S- 系. 对任意 $a\in A$，有 S- 系同构 $Sa\simeq Se$，所以 Se 是正则的，从而 $e^2=e\in T(S)$. 由条件即知 Se 是极小左理想，因此 Sa 是单 S- 系，即 Sa 中再没有真子系. 容易证明 A 是若干个单子系的余直积，而每个单子系是投射的；所以 A 是投射

的. //

定理 2.6 对于幺半群 S,以下两条等价:

(1) 所有正则 S- 系是自由的;

(2) S 是群.

证明 (1)⇒(2) 设 $e \in T(S)$,则由定理 2.5 知 Se 是 S 的极小左理想. 又 Se 也是正则的,所以 $Se \simeq S$. 这说明 S 没有真的左理想,所以 S 是群.

(2)⇒(1) 设 S 是群,A 是正则 S- 系,则 A 是循环子系 $A_i(i \in I)$ 的余直积. 由命题 1.6 知每个 A_i 是正则系,所以由推论 1.4 知 A_i 是投射的,因此 $A_i \simeq S$. 所以 A 是自由系. //

定理 2.7 对于幺半群 S,以下两条等价:

(1) 所有正则系是可除的;

(2) 对于任意 $e^2 = e \in T(S)$,Se 是可除的.

证明 (1)⇒(2) 这是显然的,因为 Se 是正则 S- 系.

(2)⇒(1) 设 A 是正则 S- 系,$a \in A$,则存在 $e^2 = e \in S$,使得 $Sa \simeq Se$. 显然 $e \in T(S)$,所以 Se 是可除的,即对任意右可消元 d,有 $dSe = Se$. 因此 $dSa = Sa$. 所以

$$dA = d(\bigcup_{a \in A} Sa) = \bigcup_{a \in A} dSa = \bigcup_{a \in A} Sa = A,$$

即 A 是可除系. //

定理 2.8 对于幺半群 S,以下两条等价:

(1) 所有正则 S- 系是主弱内射的;

(2) 任意 $s \in T(S)$,s 是 von Neumann 正则元,且对任意 $p \in S - T(S)$,若 p 是 e- 可消的,$e^2 = e \in T(S)$,则 $e \in pS$.

证明 (1)⇒(2) 设 $s \in T(S)$,则 $Ss \leqslant T(S)$,所以 Ss 是正则 S- 系. 由条件即知 Ss 是主弱内射的,所以存在 S- 同态 $g: S \to Ss$,使得 $g|_{Ss} = 1$. 设 $g(1) = ts$,则 $sts = sg(1) = g(s) = s$,所以 s 是正则元.

设 $p \in S - T(S)$，且存在 $e^2 = e \in T(S)$，使得 p 是 e- 可消的. 作映射 $f: Sp \to Se$ 为

$$f(sp) = se, \quad \forall\, s \in S.$$

因为 p 是 e- 可消的，所以 f 是映射. 显然 f 还是 S- 同态. 因为 Se 是正则的，所以是主弱内射的. 因此存在 S- 同态 $g: S \to Se$，使得 $g|_{Sp} = f$. 故有

$$e = f(p) = g(p) = pg(1) \in pS.$$

(2)⇒(1)　由命题 3.8.15，只需证明任意正则 S- 系是余平坦系. 设 A 是正则系，$a \in A$，$s \in S$，且 $a \notin sA$. 要证明存在 $h, k \in S$，使得 $hs = ks$，但 $ha \neq ka$.

设 $s \in T(S)$，则存在 $s' \in S$，使得 $s = ss's$. 令 $h = 1$，$k = ss'$，则 $hs = ks$，但 $ha \neq ka$，否则 $a = ha = ka = ss'a \in sA$，矛盾.

设 $s \in S - T(S)$. 假定对任意 $h, k \in S$，若 $hs = ks$，则必有 $ha = ka$. 因为 a 是正则元，所以存在 $e^2 = e \in T(S)$，使得 $\{a, e\}$ 是 A 的正则对. 设 $h, k \in S$，使得 $hs = ks$，则由假定知有 $ha = ka$，所以 $he = ke$. 这说明 s 是 e- 可消的. 由条件可知 $e \in sS$，所以存在 $t \in S$，使得 $e = st$，因此 $a = ea = sta \in sA$. 矛盾. 因此存在 $h, k \in S$，使得 $hs = ks$，但 $ha \neq ka$. 即 A 是余平坦的.　//

定理 2.9　对于幺半群 S，以下三条等价：

(1) 所有正则 S- 系是余自由的；

(2) 所有 S- 系是余自由的；

(3) $S = \{1\}$.

证明　(3)⇒(2)⇒(1)　显然.

(1)⇒(3)　设 $e^2 = e \in T(S)$，则 Se 是正则 S- 系，所以是余自由的，即存在集合 X，使得 $Se \simeq X^S$. 如果 $|X| \geq 2$，则 $|X^S| > |S| \geq |Se|$，矛盾. 所以 $|X| = 1$. 因此 $|Se| = |X^S| = 1$，这说明 e 是 S 的右零元. 考虑 S- 系 $A = Se \dot{\cup} Se$，则 A 是正则系，且 $|A| = 2$.

由条件知 A 是余自由的,所以 $A \simeq Y^S$. 如果 $|S| \geqslant 2$,则当 $|Y| = 1$ 时,$|Y^S| = 1$,当 $|Y| \geqslant 2$ 时,$|Y^S| > 2$,所以和 $|A| = 1$ 矛盾. 因此必有 $|S| = 1$,即 $S = \{1\}$. //

例 2.10 设 P 是只有一个幂等元的非右可消幺半群,T 是正则半群,$S = P \dot{\cup} T$,规定 S 上的乘法运算为

$$pt = tp = t, \quad \forall\, p \in P, \forall\, t \in T,$$

其他元素相乘时按照原来的定义,则 S 是幺半群,T 是 S 的左理想. 下面证明 $T = T(S)$.

显然有 $T \subseteq T(S)$. 设 $a \in P \cap T(S)$,则存在幂等元 e,使得 $\{a, e\}$ 是正则对. 如果 $e \in T$,则 $a = ea = e$,矛盾. 所以 $e \in P$,故 $e = 1$. 设 $u \in P$ 是非右可消元,则 $ua \in T(S)$. 因为 $ua \in P$,所以 T 中的任意幂等元都不能和 ua 构成正则对. 若 $\{ua, 1\}$ 是正则对,则 ua 是 P 的右可消元. 矛盾. 这说明 $P \cap T(S) = \varnothing$,所以 $T = T(S)$.

设 $s \in S, e^2 = e \in T$. 若 $s \in P$,则 $se = e$ 是正则元. 若 $s \in T$,则 $se \in T$,所以 se 仍是 von Neumann 正则元. 因此 S 满足定理 2.2 的条件(4),所以所有正则 S- 系是平坦(弱平坦,主弱平坦)的. 显然可以使得 S 不是 von Neumann 正则幺半群,因此 S 不是左绝对平坦幺半群.

如果取 T 为完全单半群,则可得到幺半群 S,它满足定理 2.5 的条件(4),所以所有正则 S- 系是投射的.

设 $p \in P, e^2 = e \in T(S)$,且 p 是 e- 可消的,则 $e = pe \in pS$,所以 S 满足定理 2.8 的条件(2),因此所有正则 S- 系是主弱内射的.

设 A 是 S- 系,$s, t \in S$. 如果

$$sa = ta(\forall\, a \in A) \Rightarrow s = t,$$

则称 A 是忠实 S- 系.

显然强忠实 S- 系是忠实的.

定理 2.11 对于幺半群 S,以下两条等价:

(1) 所有正则 S- 系是忠实的;

(2) 对任意 $e^2 = e \in T(S)$,左理想 Se 是忠实的.

证明 (1)⇒(2) 显然.

(2)⇒(1) 设 A 是正则 S- 系,$u, v \in S$,使得对任意 $x \in A$ 有 $ux = vx$. 取 $a \in A$,则存在 $e^2 = e \in T(S)$,使得 $\{a, e\}$ 是正则对. 对于任意 $s \in S$,有 $usa = vsa$,所以 $use = vse$. 利用 Se 的忠实性即得 $u = v$. //

如何刻画所有正则 S- 系是内射系的幺半群,以及所有正则系是弱内射系的幺半群,至今还是没有解决的问题.

§3 平坦系的正则性

本节考虑所有平坦 S- 系是正则系的幺半群,以及其他相关的问题. 其主要结果选自[111]和[158].

首先证明

引理 3.1 设 $S = N^1$,其中 N 是左零半群,A 是弱平坦左 S- 系. 如果 $a \in A$,$s, t \in N$,使得 $sa = ta$,则 $s = t$.

证明 因为 $sa = ta$,所以在 $S \otimes A$ 中有 $s \otimes a = t \otimes a$. 由于 A 是弱平坦的,所以在 $(sS \cup tS) \otimes A$ 中有 $s \otimes a = t \otimes a$. 因此存在 $u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S$,$s_1, \cdots, s_n \in sS \cup tS$,$a_2, \cdots, a_n \in A$,使得

$$\begin{aligned} s &= s_1 u_1, & & \\ s_1 v_1 &= s_2 u_2, & u_1 a &= v_1 a_2, \\ s_2 v_2 &= s_3 u_3, & u_2 a_2 &= v_2 a_3, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$s_n v_n = t, \qquad u_n a_n = v_n a.$$

记 $s_0 = s, s_{n+1} = t, s_i = w_i t_i, t_i \in S, w_i \in \{s, t\}, i = 1, \cdots, n$. 显然存在 i 使得 $s_i = st_i, s_{i+1} = tt_{i+1}$. 所以有

$$s = st_i v_i = s_i v_i = s_{i+1} u_{i+1} = tt_{i+1} u_{i+1} = t. \qquad //$$

定理 3.2 对于幺半群 S,以下几条等价:

(1) 所有平坦 S- 系是正则的;

(2) 所有弱平坦 S- 系是正则的;

(3) 任意平坦 S- 系的循环子系是强平坦的;

(4) 任意弱平坦 S- 系的循环子系是强平坦的;

(5) $S = N^1$,其中 $N = \varnothing$,或者 N 是左零半群.

证明 因为 S- 系 A 是正则的当且仅当其循环子系是投射的,所以(1)⇒(3)、(2)⇒(4) 是显然的. 只需证明(5)⇒(2) 和(3)⇒(5).

(5)⇒(2) 设 $S = \{1\}$,则结论自然成立. 设 $S = N^1$,其中 N 是左零半群. 设 A 是弱平坦 S- 系,$a \in A$. 要证明 Sa 是投射 S- 系.

设对任意 $s \in N$ 都有 $sa \neq a$. 规定映射 $f: Sa \to S$ 如下:

$$f(ta) = t, \quad \forall\, t \in S.$$

设 $ta = t'a, t, t' \in S$. 如果 $t, t' \in N$,则由引理 3.1 知 $t = t'$. 如果 $t \in N, t' = 1$,则 $ta = a$,矛盾. 如果 $t' \in N, t = 1$,也可得到矛盾. 因此 f 是有定义的. 显然 f 还是 S- 同构,所以 $Sa \simeq S$ 是投射的.

设存在 $s \in N$,使得 $sa = a$. 作映射 $f: Sa \to Ss$ 如下:

$$f(a) = s,$$
$$f(ta) = t, \quad \forall\, t \in N.$$

利用引理3.1容易验证 f 是有定义的. 显然 f 还是 S- 同构. 所以 $Sa \simeq Ss$ 是投射的.

(3)⇒(5) 设任意平坦 S- 系的循环子系是强平坦的,则任意平坦的循环 S- 系是强平坦的. 由定理 5.6.8 知 S 是左谐零的,即对

任意 $1 \neq x \in S$，存在 n，使得 x^n 是 S 的左零元. 因为 S 是平坦系，所以 S 的任意主左理想是强平坦的，即 S 是左 PSF 幺半群. 由定理 4.4.13 知 S 中的任意元都是右半可消元.

设 $x \neq 1, x \in S$. 假定 n 是使得 x^n 为左零元的最小正整数. 如果 $n = 1$，则 x 即为左零元. 设 $n > 1$. 因为

$$x^n x = x^n = x^{n-1}x,$$

而 x 是右半可消元，所以存在 $u \in S$，使得

$$x^n u = x^{n-1}u, \quad ux = x.$$

如果 $u = 1$，则 $x^n = x^{n-1}$，和 n 的最小性矛盾. 所以 $u \neq 1$. 因为 S 是左谐零的，所以存在 m 使得 u^m 是 S 的左零元. 因为

$$x = ux = u^2x = \cdots = u^m x = u^m,$$

所以 x 是 S 的左零元. 这和 $n > 1$ 矛盾.

所以 x 是 S 的左零元，即 $S = N^1$，其中 $N = \varnothing$，或 N 是左零半群. //

由定理 3.2 及其证明过程可以得到

推论 3.3 对于幺半群 S，以下几条等价：

(1) 所有循环平坦 S- 系是正则的；

(2) 所有循环弱平坦 S- 系是正则的；

(3) 任意循环平坦 S- 系的循环子系是强平坦的；

(4) 任意循环弱平坦 S- 系的循环子系是强平坦的；

(5) $S = N^1$，其中 $N = \varnothing$，或 N 是左零半群.

推论 3.4 对于幺半群 S，以下两条等价：

(1) S 是右 PP 幺半群，且所有循环平坦左 S- 系是强平坦的；

(2) $S = N^1$，其中 $N = \varnothing$ 或是左零半群.

证明 (2)⇒(1) 由推论 3.3 即得.

(1)⇒(2) 由定理 5.6.10 知任意 $x \in S$，x 是左零元或左可消元. 再由定理 5.1.5 知 S 中的左可消元只有 1. 所以 $S = N^1$，其中

$N = \varnothing$，或 N 是左零半群. //

推论 3.5 设 S 是左 PSF 幺半群，则以下三条是等价的：

(1) 所有平坦 S- 系满足条件(E)；

(2) 所有弱平坦 S- 系满足条件(E)；

(3) $S = N^1$，其中 $N = \varnothing$，或 N 是左零半群.

证明 (2)⇒(1) 显然.

(1)⇒(3) 设所有平坦 S- 系满足条件(E)，则所有循环的平坦 S- 系是强平坦的. 所以类似于定理 3.2 中(3)⇒(5) 的证明即可得结论.

(3)⇒(2) 由定理 3.2 及命题 1.12 即得. //

推论 3.5 给出了第五章 §10 中一个未解决问题的部分答案.

由定理 2.2 知，若所有正则系是平坦的，则对任意 $s \in S$，任意 $e^2 = e \in T(S)$，se 是 S 的正则元. 所以由定理 3.2 知，如果所有平坦系是正则的，则所有正则系是平坦的. 反过来的结论是不成立的，即当所有正则 S- 系是平坦系时，所有平坦系未必是正则的. 例如令 S 为例 2.10 中的幺半群，则由例 2.10 知所有正则 S- 系是平坦的，但存在非正则的平坦系.

推论 3.6 设 S 的任意两个主右理想的交非空，则所有平坦 S- 系是正则的当且仅当 $S = \{1\}$ 或者 $S = \{1,0\}$.

证明 由定理 3.2 立得. //

由定理 5.5.5 知，若 I 是 S 的真左理想，则 S/λ_I 是平坦的当且仅当任意 $x \in I$，必有 $x \in xI$，且 S 的任意两个右理想有非空的交. 对于主弱平坦性，有

引理 3.7 设 I 是 S 的真左理想. 若对任意 $x \in I$，有 $x \in xI$，则 S/λ_I 是主弱平坦 S- 系.

证明 设 $x, b, b' \in S$，使得在 $S \otimes S/\lambda_I$ 中有 $x \otimes \overline{b} = x \otimes \overline{b'}$. 易知有 $x\overline{b} = x\,\overline{b'}$. 所以有两种情形：

(i) $xb = xb'$. 此时有如下的等式组：

$$\begin{aligned} & x = x \cdot 1, \\ & xb = xb', \qquad 1 \cdot \bar{b} = b \cdot \bar{1}, \\ & x \cdot 1 = x, \qquad b' \cdot \bar{1} = 1 \cdot \overline{b'}. \end{aligned}$$

所以在 $xS \otimes S/\lambda_I$ 中有 $x \otimes \bar{b} = x \otimes \overline{b'}$.

(ii) $xb \in I, xb' \in I$. 此时存在 $y, z \in I$，使得 $xb = xby, xb' = xb'z$. 所以有

$$\begin{aligned} & x = x \cdot 1, \\ & xb = x(by), \qquad 1 \cdot \bar{b} = b \cdot \bar{1}, \\ & x(b'z) = xb', \qquad (by) \cdot \bar{1} = (b'z) \cdot \bar{1}, \\ & x \cdot 1 = x, \qquad b' \cdot \bar{1} = 1 \cdot \overline{b'}. \end{aligned}$$

因此在 $xS \otimes S/\lambda_I$ 中仍有 $x \otimes \bar{b} = x \otimes \overline{b'}$.

所以 S/λ_I 是主弱平坦的. //

定理 3.8 对于幺半群 S，以下各条等价：

(1) 所有主弱平坦 S- 系是正则的；

(2) 所有挠自由 S- 系是正则的；

(3) 所有余自由 S- 系是正则的；

(4) 所有内射 S- 系是正则的；

(5) 所有弱内射 S- 系是正则的；

(6) 所有主弱内射 S- 系是正则的；

(7) 所有可除 S- 系是正则的；

(8) 所有忠实 S- 系是正则的；

(9) 所有 S- 系是正则的；

(10) $S = \{1\}$ 或 $S = \{1, 0\}$.

证明 (1)⇒(10) 设所有主弱平坦 S- 系是正则的，则所有平坦 S- 系是正则的. 由定理 3.2 即知 $S = N^1$，其中 $N = \varnothing$ 或 N 是左零半群. 设 $S \neq \{1\}$，则 $N \neq \varnothing$. 显然 N 是 S 的真左理想. 因为

N 中的元皆为幂等元，所以由引理 3.7 知 S/λ_N 是主弱平坦的，因此由条件知 S/λ_N 是正则的，从而 S/λ_N 是投射的，所以满足条件(P). 设 $x,y \in N$，则 $x\lambda_N y$. 所以由命题 5.1.1 知存在 $u,v \in S$，使得 $xu = yv$，且 $u\lambda_N 1\lambda_N v$. 由于 $1 \notin N$，所以 $u = 1 = v$，故 $x = y$. 这说明 $|N| = 1$. 所以 $S = \{1,0\}$.

(9)⇒(2)⇒(1) 及 (9)⇒(8)，(9)⇒(7)⇒(6)⇒(5)⇒(4)⇒(3) 都是显然的.

(8)⇒(9)　设 A 是任意 S- 系，令 $B = A \dot{\cup} S$，则 B 是忠实的，所以由条件知 B 是正则系，从而由命题 1.6 知 A 是正则系. 所以所有 S- 系是正则的.

(3)⇒(9)　设 A 是任意 S- 系，由推论 3.1.4 知 A 可以嵌入到 S- 系 A^S 中，而 A^S 是余自由的，从而是正则的，所以 A 是正则系. 这即证明了所有 S- 系是正则的.

(10)⇒(9)　设 $S = \{1\}$，则显然所有 S- 系是正则的，下设 $S = \{1,0\}$.

设 A 是任意 S- 系，$a \in A$，则 Sa 中最多只有两个元素：$a, 0a$. 设 $a = 0a$，则 $Sa \simeq S0$，所以 Sa 是投射的. 设 $a \neq 0a$，则容易证明 $Sa \simeq S1$，因此 Sa 仍是投射的. 所以 A 是正则系.　//

定理 3.9　对于幺半群 S，以下三条等价：

(1) 所有自由 S- 系是正则的；

(2) 所有投射 S- 系是正则的；

(3) S 是左 PP 幺半群.

证明　(2)⇒(1) 是显然的. 因为 ${}_SS$ 是自由 S- 系，所以 (1)⇒(3) 也是显然的.

(3)⇒(2)　设 S 是左 PP 幺半群，A 是投射 S- 系，则 $A = \dot{\bigcup} Se_i, e_i^2 = e_i \in E(S)$. 所以由命题 1.6 即知 A 是正则的.　//

定理 3.10　对于幺半群 S，以下两条等价：

(1) 所有强平坦 S- 系是正则的；

(2) S 是左 PP 幺半群且满足条件

(FP_2)　*设 M 是 $E(S)$ 的子集合，如果对于任意 $e_1,\cdots,e_n,f_1,\cdots,f_m\in M$，存在 $f\in M$，满足 $e_1\cdots e_nf=f_1\cdots f_mf$，那么 S 的子半群 $\langle M\rangle$ 中含有右零元.*

证明　(1)⇒(2)　由定理 3.9 即知 S 是左 PP 幺半群. 因为所有强平坦 S- 系是正则的，所以所有循环的强平坦 S- 系是投射的，因此由定理 5.9.1 知 S 满足条件 (FP_2).

(2)⇒(1)　设 A 是强平坦 S- 系，$a\in A$. 要证明 a 是 A 的正则元即可. 令

$$\mathrm{ann}(a)=\{(s,t)\mid s,t\in S, sa=ta\}.$$

考虑两种情形：

(i) $\mathrm{ann}(a)=1_S$. 此时 $Sa\simeq S$，所以 $\{a,1\}$ 是 A 的正则对.

(ii) $\mathrm{ann}(a)\neq 1_S$. 此时存在 $s\neq t$，但 $sa=ta$. 因为 A 是强平坦系，所以 A 满足条件(E)，从而存在 $a'\in A, u\in S$，使得

$$su=tu,\quad a=ua'.$$

又因为 S 是左 PP 幺半群，所以存在 $e\in E(S)$，使得 $se=te, u=eu$. 因此 $ea=eua'=ua'=a$. 令

$$M=\{e\in E(S)\mid ea=a\},$$

则 $M\neq\varnothing$. 设 $e_1,\cdots,e_n,f_1,\cdots,f_m\in M$，则显然有

$$e_1\cdots e_na=a=f_1\cdots f_ma,$$

所以 $(e_1\cdots e_n,f_1\cdots f_m)\in\mathrm{ann}(a)$. 类似于前面的证明可知存在 $f^2=f\in S$，使得 $e_1\cdots e_nf=f_1\cdots f_mf$ 且 $fa=a$. 所以 $f\in M$. 因此由条件 (FP_2) 知 $\langle M\rangle$ 中含有右零元，设其为 θ. 显然 $\theta=f_1\cdots f_k$，其中 $f_1,\cdots,f_k\in M$. 所以 $\theta a=a$. 设 $sa=ta$，则由前面的证明知存在 $e^2=e\in S$，使得 $se=te$，且 $ea=a$，所以 $e\in M$. 因此 $s\theta=s(e\theta)=se\theta=te\theta=t(e\theta)=t\theta$. 这说明 $\{a,\theta\}$ 是 A 的正则对.

因此 a 是 A 的正则元，从而 A 是正则 S- 系. //

推论 3.11 ，对于幺半群 S，以下三条等价：

(1) 所有满足条件(E) 的 S- 系是正则的；

(2) 所有均衡平坦 S- 系是正则的；

(3) S 是左 PP 幺半群且满足条件(FP_2).

证明 由定理 3.10 的证明过程即得. //

§4 正则系的圈积

本节介绍圈积的概念，并讨论正则系的圈积，以及圈积的正则性，从而给出了一种构造正则系的方法.

设 X,Y 是两个集合，令 $F(X,Y)=\{f:X\to Y\}$，则 $F(X,X)=\mathscr{T}(X)$.

设 S,T 是幺半群，A 是左 S- 系. 记 $W=W(S,T,A)=S\times F(A,T)$，规定其乘法运算为

$$(s,f)(t,g)=(st,f_tg),\quad \forall\, s,t\in S,\forall\, f,g\in F(A,T),$$

其中映射 f_tg 的定义为

$$(f_tg)(a)=f(ta)g(a),\quad \forall\, a\in A.$$

容易证明 W 关于上述乘法运算构成一个半群. 若记 S 和 T 的单位元分别为 e,f，则容易验证 W 的元素 (e,c_f) 是 W 的单位元，从而 W 是幺半群，这里 c_f 的定义为

$$c_f(a)=f,\quad \forall\, a\in A.$$

幺半群 W 称为由 S- 系 A 决定的幺半群 S 和 T 的圈积.

设 B 是左 T- 系，令 $C=A\times B$，规定 W 在 C 上的左作用为

$$(s,f)(a,b)=(sa,f(a)b),$$
$$\forall\, a\in A,\forall\, b\in B,\forall\, s\in S,\forall\, f\in F(A,T).$$

容易验证 C 是左 W- 系. 称 C 为 A 和 B 的圈积,记为 $C = {}_S\mathrm{Awr}_T B$ 或 $C = A\mathrm{wr}B$.

例 4.1 设 F 为集合 X 上的自由右 S- 系,即 $F = \dot{\bigcup\limits_{x_i \in X}} x_i S$,其中 $x_i S \simeq S$. 记 F 的自同态幺半群为 $\mathrm{End}_S F$. 作 $\mathscr{T}(X)$ 和 S 的由 $\mathscr{T}(X)$- 系 X 决定的圈积 $W = W(\mathscr{T}(X), S, X)$,作映射 Φ:$\mathrm{End}_S F \to W$ 为

$$\Phi(\varphi) = (s, f), \quad \forall\, \varphi \in \mathrm{End}_S F,$$

这里 $s \in \mathscr{T}(X)$,$f \in F(X, S)$,且满足

$$\Phi(x) = s(x) f(x), \quad \forall\, x \in X.$$

显然 φ 可由 $f(x)$ 及 $s(x)$ 唯一确定,所以 Φ 是单映射. 对于任意 $s \in \mathscr{T}(X)$ 和 $f \in F(X, S)$,可通过等式 $\varphi(xt) = s(x) f(x) t$ 定义 F 的 S- 系自同态 φ. 所以 Φ 是满的. 设 $\varphi, \varphi' \in \mathrm{End}_S F$,$\varphi(x) = s(x) f(x)$,$\varphi'(x) = s'(x) f'(x)$,则

$$\begin{aligned}(\varphi\varphi')(x) &= \varphi(\varphi'(x)) = \varphi(s'(x) f'(x)) \\ &= \varphi(s'(x)) f'(x) = s(s'(x)) f(s'(x)) f'(x) \\ &= (ss')(x) f(s'x) f'(x),\end{aligned}$$

所以 $\Phi(\varphi\varphi') = (ss', f_{s'} f') = (s, f)(s', f') = \Phi(\varphi)\Phi(\varphi')$. 因此 Φ:$\mathrm{End}_S F \to W$ 是半群同构.

记 $T = \mathrm{End}_S F$,令 α:${}_T F \to {}_{\mathscr{T}(X)} X \mathrm{wr}_S S$ 如下:

$$\alpha(xt) = (x, t), \quad \forall\, x \in X, \forall\, t \in S.$$

显然 α 是映射. 设 $\varphi \in T$,$\Phi(\varphi) = (s, f)$,则

$$\begin{aligned}\alpha(\varphi(xt)) &= \alpha(s(x) f(x) t) = (s(x), f(x) t) \\ &= (sx, f(x) t) = (s, f)(x, t) \\ &= \Phi(\varphi)\alpha(xt).\end{aligned}$$

所以若把同构的幺半群 $\mathrm{End}_S F$ 和 W 看成一致的,则 α 就是 ${}_T F$ 到 ${}_{\mathscr{T}(X)} X \mathrm{wr}_S S$ 的同构.

例 4.2 设 X, Y 是无向无圈且没有多重边界的图,记 $M(X)$ 为图 X 的自同态幺半群 $\mathrm{End}X$ 的一个子幺半群,则顶点集 $V(X)$ 是左 $M(X)$- 系. 记 W 为由 $V(X)$ 决定的 $M(X)$ 和 $M(Y)$ 的圈积,

则图X和图Y的字典积$X[Y]$即为左$M(X)$-系$V(X)$和左$M(Y)$-系$V(Y)$的圈积,即$X[Y] = {}_{M(X)}V(X)\mathrm{wr}\ {}_{M(Y)}V(Y)$. 其证明参见[91].

下面讨论正则系的圈积及圈积的正则性. 先引入如下记号.

设S是正则S-系,$a \in A$,则存在$e^2 = e \in S$,使得$\{a,e\}$是A的正则对. 记$A_1^e = \{x \in A \mid ex = a\}$,$A_2^e = A - A_1^e$.

引理 4.3 设$a \in A$,$\{a,e\}$,$\{a,e'\}$是正则对,则有$A_2^e = \varnothing \Leftrightarrow A_2^{e'} = \varnothing \Leftrightarrow A_1^e = A \Leftrightarrow A_1^{e'} = A$.

证明 如果对任意$a \in A$有$ex = a$,则$e'x = (ee')x = e(e'x) = a$,所以$A_1^{e'} = A$. 结论得证. //

以下总设S,T为幺半群,A是左S-系,B是左T-系,W是由A决定的S和T的圈积,$C = {}_SA\mathrm{wr}_TB$,则C是左W-系.

引理 4.4 设$\{(a,b),(e,h)\}$是$A\mathrm{wr}B$的正则对,则$\{a,e\}$,$\{b,h(a)\}$分别是A和B的正则对.

证明 因为$(e,h)^2 = (e,h)$,$(e,h)(a,b) = (a,b)$,所以$e^2 = e$,$ea = a$,且对任意$x \in A$有$h(ex)h(x) = h(x)$. 因此,$h(a) = h(ea)h(a) = h(a)h(a)$. 从$(e,h)(a,b) = (a,b)$还可得到$b = h(a)b$.

设$p,q \in S$使得$pa = qa$. 对任意$t \in T$,定义映射$c_t: A \to T$如下:

$$c_t(x) = t, \quad \forall\, x \in A,$$

则有

$$(p,c_1)(a,b) = (pa,b) = (qa,b) = (q,c_1)(a,b).$$

因为$\{(a,b),(e,h)\}$是正则对,所以有

$$(p,c_1)(e,h) = (q,c_1)(e,h),$$

从而$pe = qe$. 这说明$\{a,e\}$是A的正则对.

设$u,v \in T$使得$ub = vb$. 要证明$uh(a) = vh(a)$. 因为

$$(1,c_u)(a,b) = (a,ub) = (a,vb) = (1,c_v)(a,b),$$

所以

$$(1,c_u)(e,h) = (1,c_v)(e,h),$$

从而有

$$uh(x) = vh(x), \quad \forall\ x \in A.$$

所以 $uh(a) = vh(a)$. 这说明$\{b,h(a)\}$是 B 的正则对. //

引理 4.5 设$\{(a,b),(e,h)\}$是 $A\mathrm{wr}B$ 的正则对,且 $A_2^e \neq \varnothing$,则存在 $x_0 \in A$,使得 $ex_0 \neq a$,且 $h(x_0)$ 是 T 的右零元.

证明 设 $x_0 \in A_2^e$,则 $ex_0 \neq a$. 令 $t_0 = h(x_0)$. 对任意 $t \in T$,规定 $f:A \to T$,使之满足

$$f(a) = 1, f(ex_0) = t,$$

则有

$$(1,f)(a,b) = (a,f(a)b) = (a,b) = (e,h)(a,b).$$

所以有

$$(1,f)(e,h) = (e,h)(e,h) = (e,h).$$

因此对任意 $x \in A$ 有

$$f(ex)h(x) = h(x).$$

所以 $tt_0 = f(ex_0)h(x_0) = h(x_0) = t_0$. 由 $t \in T$ 的任意性即知 t_0 是 T 的右零元. //

引理 4.6 设 $a \in {}_SA, b \in {}_TB, e^2 = e \in S, w^2 = w \in T$, $\{a,e\}$, $\{b,w\}$是正则对,且当 $A_2^e \neq \varnothing$ 时,T 中有右零元 s_0,则存在 $h \in F(A,T)$,使得$\{(a,b),(e,h)\}$是正则对,且 $h|_{A_1^e} = c_w|_{A_1^e}, h|_{A_2^e} = c_{s_0}|_{A_2^e}$.

证明 首先,$(e,h)(e,h) = (e,h_eh)$. 对任意 $x \in A_1^e, ex = a$,所以 $(h_eh)(x) = h(ex)h(x) = h(a)h(x) = h(a)w = w^2 = w = h(x)$. 当 $x \in A_2^e$ 时,$A_2^e \neq \varnothing$,所以 T 中有右零元 s_0,因此 $(h_eh)(x) = h(ex)h(x) = h(ex)s_0 = s_0 = h(x)$. 这就证明了 $h_eh = h$,所以 $(e,h)(e,h) = (e,h)$. 显然还有

$$(e,h)(a,b) = (ea,h(a)b) = (a,wb) = (a,b).$$

设 $p,q \in A, f,g \in F(A,T)$,使得 $(p,f)(a,b) = (q,g)(a,b)$,则有

$$pa = qa, f(a)b = g(a)b.$$

所以 $pe = qe, f(a)w = g(a)w$. 因为对任意 $x \in A_1^e$,

$$f(ex)h(x) = f(a)w = g(a)w = g(ex)h(x),$$

对任意 $x \in A_2^e$,

$$f(ex)h(x) = f(ex)s_0 = s_0 = g(ex)s_0 = g(ex)h(x),$$

所以有

$$(p,f)(e,h) = (pe,f_eh) = (qe,g_eh) = (q,g)(e,h).$$

因此$\{(a,b),(e,h)\}$即为 $A\mathrm{wr}B$ 的正则对. //

定理 4.7 设 W 是由 A 决定的幺半群 S 和 T 的圈积,$C = A\mathrm{wr}B$ 是 A 和 B 的圈积,则$(a,b) \in C$ 是正则的当且仅当 a,b 分别是 A 和 B 的正则元,且如果存在 $x_0 \in A, e \in \underline{M}_a$,使得 $ex_0 \neq a$,则 T 中含有右零元.

证明 由引理 4.4,4.5,4.6 即得. //

定理 4.8 设 W 是由 A 决定的 S 和 T 的圈积,则以下两条等价:

(1) $A\mathrm{wr}B$ 是正则 W- 系;

(2) A 是正则 S- 系,B 是正则 T- 系,且如果存在 $x_0, a \in A, e \in \underline{M}_a$,使得 $ex_0 \neq a$,则 T 中含有右零元.

证明 由定理 4.7 立得. //

推论 4.9 设 F 是集合 X 上的自由右 S- 系,$x \in X, s \in S$,则 xs 是左 End_SF- 系 T 中的正则元当且仅当 s 是${}_SS$ 中的正则元.因此左 End_SF- 系 F 是正则的当且仅当 S 是左 PP 的.

证明 令 $T = \mathrm{End}_SF$.由例 4.1 知有同构:${}_TF \simeq {}_{\mathscr{T}(X)}X\mathrm{wr}_SS$.显然$\{x,e\}$是左 $\mathscr{T}(X)$- 系 X 的正则对当且仅当 $e = c_x$,所以 $A_2^e = \varnothing$.因此由定理 4.7,4.8 即得本推论. //

例 4.10 设 S,T 都是正则幺半群,且 T 含有右零元.令 $A = {}_SS, B = {}_TT$,则 $A\mathrm{wr}B$ 是正则的左 W- 系,这里 $W = S \times F(A,T)$ 是 S 和 T 的圈积.令 $W^0 = W \dot{\cup} \{0\}, C^0 = (A\mathrm{wr}B) \dot{\cup} \{0\}$,则 C^0 是正则的左 W^0- 系,作圈积 $W_1 = S \times F(A, W^0)$,则 $A\mathrm{wr}C^0$ 是正则的左 W_1- 系.显然上述过程可以一直进行下去.

圈积的概念在半群理论,群理论,自动机理论中都有广泛的应用,对圈积的研究成果已非常丰富.例如 Knauer 和

Mikhalev[101] 中研究了圈积 $A\mathrm{wr}B$ 的正则性和逆性；Normak[129] 中研究了 $A\mathrm{wr}B$ 的投射性和强平坦性；Kilp 和 Kubjas[88] 中研究了 $A\mathrm{wr}B$ 的主弱内射性；Kilp，Knauer，Mikhalev[87] 中研究了 $A\mathrm{wr}B$ 的挠自由性及可除性；Kilp[82] 中研究了 $A\mathrm{wr}B$ 的主弱平坦性. 另外，Knauer 和 Mikhalev 还有研究圈积的系列文章([94—101]). 本节以正则性为例阐述了关于圈积的研究思想. 关于圈积的其他研究成果请参阅所附参考文献.

§ 5 强忠实右 S- 系

由命题 1.9 知强忠实系一定是正则系，而正则系未必是强忠实系. [84]，[85]，[157] 等文中利用右 S- 系的强忠实性刻画了幺半群. 本节利用条件(P) 及相对平坦性给出强忠实右 S- 系的特征刻画. 其主要内容选自[113].

定义 5.1 设 A 和 B 分别是右和左 S- 系. 称 B 是满足条件(P_A) 的，是指：关于任意 $a,a'\in A$ 和任意 $b,b'\in B$，若在 $A\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$，则存在 $b''\in B$，$x_1,y_1\in S$，使得 $ax_1=a'y_1$，$b=x_1b''$，$b'=y_1b''$.

引理 5.2 左 S- 系 B 满足条件(P) 当且仅当对于任意右 S- 系 A，B 满足条件(P_A).

证明 由命题 4.2.13 即知结论成立. //

定义 5.3 设 A 和 B 分别是右和左 S- 系. 称 B 是 A-(主) 平坦的，如果对于 A 的所有(循环) 子系 A'，包含映射 $A'\to A$ 所诱导的映射 $A'\otimes B\to A\otimes B$ 是单的.

显然 S_S-(主) 平坦即为(主) 弱平坦，左 S- 系 B 是平坦的当且仅当对于所有右 S- 系 A，B 是 A- 平坦的.

引理 5.4 若 $_SB$ 满足(P_A)，则 $_SB$ 是 A- 平坦的.

证明 设 $a,a'\in A$，$b,b'\in B$，且在 $A\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$. 只需证明在 $(aS\cup a'S)\otimes B$ 中亦有 $a\otimes b=a'\otimes b'$ 即可.

由于 B 满足条件(P_A)，所以存在 $b'' \in B, u, v \in S$，使得 $au = a'v$，$b = ub''$，$b' = vb''$. 所以在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有

$$a \otimes b = a \otimes ub'' = au \otimes b'' = a'v \otimes b'' \\ = a' \otimes vb'' = a' \otimes b'.$$

所以 B 是 A- 平坦的. //

引理 5.4 的逆不成立. 令 $S = \{1, 0\}$，$A = S$，$B = \{x, y, z \mid 0x = 0y = 0z = z, 1 \cdot x = x, 1 \cdot y = y, 1 \cdot z = z\}$，则由定理 4.3.7 和定理 4.3.16 知 B 是平坦的，因此 B 是 A- 平坦的，但 B 不满足条件(P). 注意到(P_S) 即为(P)，所以 B 不满足条件(P_A).

下面给出例子说明条件(P_A) 不蕴含条件(P)，A- 平坦性不蕴含平坦性.

例5.5 (1) 设幺半群 S 中有元素 x，它既不是左可逆元，也不是幂等元，则由命题 5.5.2 知 $S/\rho(x, x^2)$ 不满足条件(P)，令 $A = \{a\}$，规定 S 在 A 上的作用为 $as = a$，对任意 $s \in S$. 设 $b, b' \in S/\rho(x, x^2)$，使得在 $A \otimes S/\rho(x, x^2)$ 中有 $a \otimes b = a \otimes b'$，记 1 所在的 $\rho(x, x^2)$ 类为 $[1]_\rho$，则存在 $x_1, y_1 \in S$，使得 $b = x_1[1]_\rho$，$b' = y_1[1]_\rho$，$ax_1 = ay_1$. 所以左 S- 系 $S/\rho(x, x^2)$ 满足条件(P_A).

(2) 令 $S = \{a, b, c, 0, 1\}$，非平凡元素的乘法按下表定义：

	a	b	c
a	0	a	a
b	0	b	b
c	0	c	c

可以证明 S 是一个幺半群. 因为 $Sa = \{0, a\}$，所以 $aSa = \{0\}$，因此 a 不是正则元. 由命题 5.8.4 知 $S/\rho(a, 0)$ 不是平坦的. 令 $A = \{c, 0\}$. 容易验证 A 是 S 的右理想，所以 A 是右 S- 系. A 的真子系只有 $A' = \{0\}$. 所以左 S- 系 $S/\rho(a, 0)$ 是 A- 平坦的.

以下总是以 T_R 表示 S 的最大正则右理想.

引理 5.6 设 A 是正则右 S- 系，B 是左 S- 系，则 B 是 A- 主平坦的当且仅当对任意 $b, b' \in B$，任意 $a \in A$，若在 $A \otimes B$ 中有 a

$\otimes b = a \otimes b'$，则存在 $u \in E(S) \cap T_R$，使得 $au = a, ub = ub'$.

证明 设 B 是 A-主平坦的，且在 $A \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a \otimes b'$，则在 $aS \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a \otimes b'$，所以存在 $s_1, t_1, \cdots, s_n, t_n \in S$，$x_1, \cdots, x_n \in S, b_2, \cdots, b_n \in B$，使得

$$
\begin{aligned}
& a = ax_1s_1, & \\
& ax_1t_1 = ax_2s_2, & s_1b = t_1b_2, \\
& \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
& ax_nt_n = a, & s_nb_n = t_nb'.
\end{aligned}
$$

因为 a 是 A 的正则元，所以由命题 1.2 知存在 $e \in E(S)$，使得 $\{a, e\}$ 是正则对，显然有同构 $aS \simeq eS$，所以 eS 是正则右 S-系，从而 $e \in T_R$. 由正则对的性质知有：$e = ex_1s_1, ex_1t_1 = ex_2s_2, \cdots, ex_nt_n = e$. 因此，$eb = ex_1s_1b = ex_1t_1b_2 = ex_2s_2b_2 = \cdots ex_nt_nb' = eb'$. 令 $u = e$ 即可.

反之，设在 $A \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a \otimes b'$. 要证在 $aS \otimes B$ 中亦有 $a \otimes b = a \otimes b'$. 由条件知存在 $u \in E(S) \cap T_R$，使得 $au = a$，$ub = ub'$，所以在 $aS \otimes B$ 中有

$$
\begin{aligned}
a \otimes b &= au \otimes b = a \otimes ub \\
&= a \otimes ub' = au \otimes b' = a \otimes b',
\end{aligned}
$$

因此 B 是 A-主平坦的. //

引理 5.7 设 A 和 B 分别是右和左 S-系，则如下三条是等价的：

(1) B 是 A-平坦的；

(2) 关于任意 $a, a' \in A, b, b' \in B$，若在 $A \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$，则存在 $z \in aS \cap a'S, b'' \in B$，使得在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b' = z \otimes b''$；

(3) B 是 A-主平坦的，且关于任意 $a, a' \in A, b, b' \in B$，若在 $A \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$，则存在 $b'' \in B, z \in aS \cap a'S$，使得在 $A \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b' = z \otimes b''$.

证明 (2)⇒(1) 显然.

(1)⇒(2) 设在 $A\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$. 由于 B 是 A-平坦的,所以在 $(aS\cup a'S)\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$. 因此存在 s_1, $t_1,\cdots,s_n,t_n\in S,b_2,\cdots,b_n\in B,a_1,\cdots,a_n\in aS\cup a'S$,使得

$$\begin{aligned} &a=a_1s_1, & & \\ &a_1t_1=a_2s_2, & &s_1b=t_1b_2,\\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\ &a_nt_n=a', & &s_nb_n=t_nb'. \end{aligned}$$

设 $a_i=c_iu_i,c_i\in\{a,a'\},u_i\in S$. 在上述等式组中,总存在某个 i,使得第 i 个等式的两边分别是 ap 和 $a'q,p,q\in S$,令 $z_1=a,z_j=c_{j-1}u_{j-1}t_{j-1},2\leqslant j\leqslant n+1$,则 $z_i\in aS\cap a'S$. 由上述等式组中的前 i 行可知在 $(aS\cup a'S)\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a_is_i\otimes b_i$. 所以 $a\otimes b=a_{i-1}t_{i-1}\otimes b_i=c_{i-1}u_{i-1}t_{i-1}\otimes b_i=z_i\otimes b_i$. 同理可知在 $(aS\cup a'S)\otimes B$ 中有 $a'\otimes b'=z_i\otimes b_i$,令 $z=z_i,b''=b_i$ 即可.

(1)⇒(3) 由已证明的结果知这是显然的.

(3)⇒(1) 设在 $A\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$. 由条件(3)知存在 $b''\in B,z\in aS\cap a'S$,使得在 $A\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'=z\otimes b''$. 设 $z=as=a't$,则在 $A\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a\otimes sb''$. 因为 B 是 A-主平坦的,所以在 $(aS\cup a'S)\otimes B$ 中有

$$\begin{aligned} a\otimes b&=a\otimes sb''=as\otimes b''=z\otimes b''\\ &=a't\otimes b''=a'\otimes tb''=a'\otimes b'. \end{aligned}$$ //

引理 5.8 设 A 是正则右 S-系,B 是左 S-系,则 B 是 A-平坦的当且仅当关于任意 $x,y\in A$,任意 $b,b'\in B$,如果在 $A\otimes B$ 中有 $x\otimes b=y\otimes b'$,则存在 $u,v\in E(S)\cap T_R,s,t\in S,b''\in B$,使得

$$\begin{aligned} &xu=x,yv=y,xs=yt,\\ &ub=sb'',vb'=tb'' \end{aligned}\tag{1}$$

证明 设 B 是 A-平坦的,且在 $A\otimes B$ 中有 $x\otimes b=y\otimes b'$. 由引理 5.7 知存在 $z\in xS\cap yS,b''\in B$,使得在 $(xS\cup yS)\otimes B$ 中有 $x\otimes b=y\otimes b'=z\otimes b''$. 设 $z=xs'=yt'$,则在 $(xS\cup yS)$

$\otimes B$ 中有 $x \otimes b = x \otimes s'b''$. 由引理 5.6 知存在 $u \in E(S) \cap T_R$，使得 $xu = x, ub = us'b''$. 同理存在 $v \in E(S) \cap T_R$，使得 $yv = y$，$vb' = vt'b''$. 令 $s = us', t = vt'$，则 $xs = xus' = xs' = yt' = yvt' = yt$.

反之，设在 $A \otimes B$ 中有 $x \otimes b = y \otimes b'$. 由条件知存在 $u, v \in E(S) \cap T_R, s, t \in S, b'' \in B$，使得(1)式成立，所以在 $(xS \cup yS) \otimes B$ 中有 $x \otimes b = xu \otimes b = x \otimes ub = x \otimes sb'' = xs \otimes b'' = yt \otimes b'' = y \otimes tb'' = y \otimes vb' = yv \otimes b' = y \otimes b'$. 即 B 是 A-平坦的.

//

定理 5.9 对于右 S-系 A，以下三条等价：

(1) A 是强忠实的；

(2) A 是正则右 S-系，且任意(有限生成)A-平坦的左 S-系 B 满足条件(P_A)；

(3) A 是正则右 S-系，且任意(有限生成)A-平坦的左 S-系 B 满足条件(P).

证明 (1)⇒(3) 对于任意 $a \in A$，作 S-同态 $f: aS \to S$ 为 $f(as) = s$(由 A 的强忠实性可知 f 是有定义的). 显然 $af(a) = a$，所以 a 是正则元，故 A 是正则的. 设 B 是 A-平坦左 S-系，$b, b' \in B, x, y \in S$，使得 $xb = yb'$. 任取 $a \in A$，在 $A \otimes B$ 中有 $ax \otimes b = a \otimes xb = a \otimes yb' = ay \otimes b'$. 由引理 5.8 知存在 $u, v \in E(S) \cap T_R, s, t \in S, b'' \in B$，使得

$$ax = axu, ay = ayv, axs = ayt, ub = sb'', vb' = tb''.$$

由 A 的强忠实性可得 $u = v = 1, xs = yt$. 从而 $b = sb'', b' = tb''$，故 B 满足条件(P).

(3)⇒(2) 由引理 5.2 知这是显然的.

(2)⇒(1) 设 A 不是强忠实系，即存在 $a \in A, r, r' \in S$，使得 $ar = ar', r \neq r'$. 因为 A 是正则的，所以 a 是正则元，因此存在 $e \in E(S)$，使得 $\{a, e\}$ 是正则对，故有 $er = er'$. 因此 e 不是 S 的左可消元，令 C 为 S 的所有左可消元构成的集合，则 $1 \in C, e \notin C$，所以 $S - C$ 是 S 的非平凡左理想. 令 $M = A(S - C)$，则 M 是有限生成左

S-系.

M 不满足条件(P_A). 事实上,假定满足,则因为 $e(1,x)=(e,z)=e(1,y)$,所以在 $A\otimes M$ 中有

$$
\begin{aligned}
a\otimes(1,x) &= ae\otimes(1,x)=a\otimes e(1,x)\\
&= a\otimes e(1,y)=ae\otimes(1,y)\\
&= a\otimes(1,y),
\end{aligned}
$$

故由(P_A)可知存在 $m\in M, x_1, y_1\in S$,使得 $ax_1=ay_1, (1,x)=x_1m, (1,y)=y_1m$. 因为 $M=S(1,x)\cup S(1,y)$,所以 $M=Sm$. 矛盾.

下面证明 M 是 A-平坦的. 设 $a,a'\in A, (p,w),(p',w')\in M$,使得在 $A\otimes M$ 中有 $a\otimes(p,w)=a'\otimes(p',w')$,则存在 $(p_2,w_2),\cdots,(p_n,w_n)\in M, u_1,v_1,\cdots,u_n,v_n\in S, a_1,\cdots,a_n\in A$,使得

$$
\begin{aligned}
&a=a_1u_1,\\
&a_1v_1=a_2u_2, && u_1(p,w)=v_1(p_2,w_2),\\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots\\
&a_nv_n=a', && u_n(p_n,w_n)=v_n(p',w'),
\end{aligned}
$$

这里 $w,w',w_2,\cdots,w_n\in\{x,y,z\}$. 记 $a_0=a, a_{n+1}=a'$. 因为 A 是正则的,所以存在 $e_i\in E(S)$,使得 $\{a_i,e_i\}$ 是正则对,$i=0,\cdots,n+1$,所以有如下的等式组:

$$
\begin{aligned}
&ae_0=a_1e_1u_1,\\
&a_1e_1v_1=a_2e_2v_2, && e_1u_1(p,w)=e_1v_1(p_2,w_2),\\
&a_2e_2v_2=a_3e_3u_3, && e_2u_2(p_2,w_2)=e_2v_2(p_3,w_3),\\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots\\
&a_ne_nv_n=a'e_{n+1}, && e_nu_n(p_n,w_n)=e_nv_n(p',w').
\end{aligned}
$$

设 S 的最大正则左理想为 T_R,则 $T_R\neq\varnothing$. 易知,对任意 $i=0,1,\cdots,n+1$,和任意 $s\in S, e_is\in T_R$. 因为 T_R 作为左 S-系是正则的,所以存在 $f_i\in E(S)\cap T_R$,使得 $\{e_iu_i,f_i\}$ 是正则对,存在 $f'_i\in E(S)\cap T_R$,使得 $\{e_iv_i,f'_i\}$ 是正则对. 记

$$
a_1=e_1u_1p=e_1v_1p_2,
$$

$$\cdots\cdots$$
$$\alpha_i = e_iu_ip_i = e_iv_ip_{i-1},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha_n = e_nu_np_n = e_nv_np'.$$

利用正则对的性质又有

$$\begin{aligned} ae_0f_1p &= a_1e_1u_1f_1p = a_1e_1u_1p = a_1e_1v_1p_2 \\ &= a_2e_2u_2p_2 = \cdots = a_ne_nu_np_n \\ &= a_ne_nv_np' = a_ne_nv_nf'_np' = a'e_{n+1}f'_np'. \end{aligned}$$

下面分情形作 $ae_0S \cup a'e_{n+1}S$ 和 M 上的连接$(ae_0,(p,w))$ 和 $(a'e_{n+1},(p',w'))$ 的等式组:

(i) $\alpha_1\cdots,\alpha_n \in C$. 因为 $e_iu_ip_i = e_iv_ip_{i+1} = \alpha_i \in C$,所以由 M 的作法可知有

$$e_iu_i(p_i,w_i) = (e_iu_ip_i,w_i),$$
$$e_iv_i(p_{i+1},w_{i+1}) = (e_iv_ip_{i+1},w_{i+1}).$$

所以由 $e_iu_i(p_i,w_i) = e_iv_i(p_{i+1},w_{i+1})$ 知 $w_i = w_{i+1}$. 所以 $w = w_2 = \cdots = w_n = w'$. 因此有如下的等式组:

$$\begin{aligned} &ae_0 = ae_0f_1, \\ &ae_0f_1p = a'e_{n+1}f'_np', \quad f_1(p,w) = f_1p(1,w), \quad (*) \\ &a'e_{n+1}f'_n = a'e_{n+1}, \qquad f'_np'(1,w) = f'_n(p',w'). \end{aligned}$$

事实上,$ae_0 = a_1e_1u_1 = a_1e_1u_1f_1 = ae_0f_1$. 同理有 $a'e_{n+1}f'_n = a'e_{n+1}$. 由于 $e_1u_1p \in C$,所以 $p \in C$,因此 $w \in \{x,y\}$. 对任意 $r,r' \in S$,若 $f_1pr = f_1pr'$,则 $e_1u_1pr = e_1u_1f_1pr = e_1u_1f_1pr' = e_1u_1pr'$. 利用 $e_1u_1p \in C$ 可得 $r = r'$. 所以 $f_1p \in C$,因此有 $f_1(p,w) = (f_1p,w) = f_1p(1,w)$. 同理 $f'_np'(1,w) = f'_n(p',w')$.

(ii) $\alpha_1 \in S - C,\alpha_n \in S - C$. 此时有如下的等式组:

$$\begin{aligned} &ae_0 = ae_0f_1, \\ &ae_0f_1p = a'e_{n+1}f'_np', \quad f_1(p,w) = f_1p(1,x), \quad (**) \\ &a'e_{n+1}f'_n = a'e_{n+1}, \qquad f'_np'(1,x) = f'_n(p',w'). \end{aligned}$$

事实上,由(i) 的证法可知(* *) 中左边的等式均成立. 对任意 r,

$r' \in S$，若有 $e_1u_1pr = e_1u_1pr'$，则由正则对 $\{e_1u_1, f_1\}$ 的性质可知 $f_1pr = f_1pr'$. 所以若 $f_1p \in C$，则 $e_1u_1p \in C$. 因此当 $\alpha_1 \in S - C$ 时，$f_1p \in S - C$. 故有 $f_1(p,w) = (f_1p,z) = f_1p(1,x)$. 同理 $f'_np'(1,x) = f'_n(p',w')$.

(iii) $\alpha_1 \in C, \alpha_n \in S - C$. 类似于(i)，(ii) 中的讨论可知此时仍有形如（ * ）的等式组.

(iv) $\alpha_1 \in S - C, \alpha_n \in C$. 类似于(iii).

(v) $\alpha_1 \in C, \alpha_n \in C$，但存在 $\alpha_i \in S - C, i \in \{2,\cdots,n-1\}$. 此时 $w \neq z$. 有如下的等式组：

$ae_0 = ae_0f_1$,	
$ae_0f_1p = a_ie_iu_if_ip_i$,	$f_1(p,w) = f_1p(1,w)$,
$a_ie_iu_if_ip_i = a'e_{n+1}f'_np'$,	$f_ip_i(1,w) = f_ip_i(1,w')$,
$a'e_{n+1}f'_n = a'e_{n+1}$,	$f'_np'(1,w') = f'_n(p',w')$.

对于前四种情形，显然在 $(aS \cup a'S) \otimes M$ 中有

$$a \otimes (p,w) = ae_0 \otimes (p,w),$$
$$= a'e_{n+1} \otimes (p',w') = a' \otimes (p',w').$$

对于最后一种情形，考虑框线以内的等式组，利用情形(iii) 可知在 $(ae_0S \cup a_ie_iu_if_ip_iS) \otimes M$ 中有

$$ae_0 \otimes (p,w) = a_ie_iu_if_ip_i \otimes (1,w').$$

因为 $a_ie_iu_if_ip_i \in a'S$，所以在 $(aS \cup a'S) \otimes M$ 中有

$$\begin{aligned} a \otimes (p,w) &= ae_0 \otimes (p,w) \\ &= a_ie_iu_if_ip_i \otimes (1,w') \\ &= a'e_{n+1}f'_np' \otimes (1,w') \\ &= a'e_{n+1} \otimes f'_np'(1,w') \\ &= a'e_{n+1} \otimes f'_n(p',w') \\ &= a'e_{n+1}f'_n \otimes (p',w') \\ &= a'e_{n+1} \otimes (p',w') \\ &= a' \otimes (p',w'). \end{aligned}$$

这样就证明了 M 是 A-平坦的. 矛盾. //

参考文献

[1] J. Ahsan, Monoids characterized by their quasi-injective S-systems, Semigroup Forum, 36(1987), 285—292.

[2] J. Ahsan, M. F. Khan, M. Shabir and M. Takahashi, Characterizations of monoids by p-injective and normal S-systems, Kobe J. Math., 8(1991), 173—190.

[3] J. Ahsan and Z. K. Liu, On relatively injective and weakly injective S-acts, Southeast Asian Bull. Math., 21(1997), 249—256.

[4] J. Ahsan and K. Saifullah, Completely quasi-projective monoids, Semigroup Forum, 38(1989), 123—126.

[5] F. W. Anderson and K. R. Fuller, Rings and Categories of Modules, Springer, New York, 1974.

[6] B. Banaschewski, Equational compactness of G-sets, Canad. Math. Bull., 17 (1974), 11—18.

[7] J. M. Barja and E. G-Rodeja, Morita equivalence of monoids, Semigroup Forum, 19 (1980), 101—106.

[8] P. Berthiaume, The injective envelope of S-sets, Canad. Math. Bull., 10(1967), 261—273.

[9] G. Bruns and H. Lakser, Injective hulls of semilattices, Canad. Math. Bull., 13 (1970), 115—118.

[10] S. Bulman-Fleming, Pullback-flat acts are strongly flat, Canad. Math. Bull., 34(1991), 1—6.

[11] S. Bulman-Fleming, Products of projective S-systems, Comm. Algebra, 19 (1991), 951—964.

[12] S. Bulman-Fleming, Flat and strongly flat S-systems, Comm. Algebra, 20(9) (1992), 2553—2567.

[13] S. Bulman-Fleming, Unification for S-systems, Personal communicated paper.

[14] S. Bulman-Fleming and V. A. R. Gould, On left absolutely flat monoids, Semigroup Forum, 41(1990), 55—59.

[15] S. Bulman-Fleming and M. Kilp, Flatness properties of acts: some examples, Semigroup Forum, to appear.

[16] S. Bulman-Fleming and K. McDowell, Absolutely flat semigroups, Pacific J. Math., 107(1983), 319—333.

[17] S. Bulman-Fleming and K. McDowell, Flatness and amalgamation in semi-

groups,Semigroup Forum,29(1984),337—342.

[18] S. Bulman-Fleming and K. McDowell, Left absolutely flat generalized inverse semigroups, Proc. Amer. Math. Soc. ,94(1985),553—561.

[19] S. Bulman-Fleming and K. McDowell, Representation extension properties of normal bands, Semigroup Forum,31(1985),257—264.

[20] S. Bulman-Fleming and K. McDowell, On left absolutely flat bands, Proc. Amer. Math. Soc. ,101(1987),613—618.

[21] S. Bulman-Fleming and K. McDowell, On V. Fleischer's characterization of absolutely flat monoids, Algebra Universalis,25(1988),394—399.

[22] S. Bulman-Fleming and K. McDowell, Coperfect monoids, Lattices, Semigroups, and Universal Algebra, Plenum Press, New York,1990,29—37.

[23] S. Bulman-Fleming and K. McDowell, Monoids over which all weakly flat acts are flat, Proc. Edinburgh Math. Soc. ,33(1990),287—298.

[24] S. Bulman-Fleming and K. McDowell, A characterization of left cancellative monoids by flatness properties, Semigroup Forum,40(1990),102—112.

[25] S. Bulman-Fleming, K. McDowell and J. Renshaw, Some observations on left absolutely flat monoids, Semigroup Forum,41(1990),165—171.

[26] S. Bulman-Fleming and P. Normak, Monoids over which all flat cyclic right acts are strong flat, Semigroup Forum,50(1995),233—241.

[27] S. Bulman-Fleming and P. Normak, Flatness properties of monocyclic acts, Monatshefte fur Mathematik,122(1996),307—323.

[28] W. D. Burgess, The injective hull of S-sets, S a semilattice of groups, Semigroup Forum,23(1981),241—246.

[29] A. H. Clifford and G. B. Preston, The Algebraic Theory of Semigroups, I, II, Providence,1961,1967.

[30] M. P. Dorofeeva, Hereditary and semi-hereditary monoids, Semigroup Forum,4 (1972),301—311.

[31] M. P. Dorofeeva, Injective and flat M-sets over hereditary monoids, Vestnik Moskovsk. Gos. Univ. ,1973,47—51.

[32] S. Eilenberg, Automata, Languages, and Machines, Vol. B, Academic Press, New York,1976.

[33] S. M. Fakhruddin, Absolute flatness and amalgams in pomonoids, Semigroup Forum, 33(1986),15—22.

[34] E. H. Feller and R. L. Gantos, Indecomposable and injective S-systems with zero, Math. Nachr. ,4(1969),37—48.

[35] E. H. Feller and R. L. Gantos, Completely injective semigroups with central

idempotents,Glasgow Math. J. ,10(1969),16—20
[36] E. H. Feller and R. L. Gantos, Completely injective semigroups, Pacific J. Math.,31(1969),359—366.
[37] E. H. Feller and R. L. Gantos, Completely right injective semigroups that are unions of groups,Glasgow Math. J. ,12(1971),43—49.
[38] V. Fleischer,Completely flat monoids,Tartu Riikl. Ul. Toimetise,610 (1982), 38—52. (English translation: Amer. Math. Soc. Trans. , 142(2) (1989), 19—31).
[39] V. Fleischer, Flat relative to diagram acts, Summaries of the conference "Theoretical and Applied Problems of Mathematics",Tartu,1980,17—19.
[40] V. Fleischer, On the wreath products of monoids with categories, ENSV TA Toimetised,35(1986),237—243.
[41] V. Fleischer and U. Knauer,Wreath products of monoids with small categories whose principal one-sided ideals form trees,J. Algebra, to appear.
[42] V. Fleischer and U. Knauer,Endomorphism monoids of acts are wreath products of monoids with small categories,Lecture Notes in Math. ,1320(1988),84—96.
[43] V. Fleischer and U. Knauer,Wreath products of monoids with small categories whose one-sided ideals form chains,Southeast Asian Bull. Math. , 18(1994), 63—72.
[44] J. Fountain,Completely right injective semigroups,Proc. London Math. Soc. ,27 (1974),28—44.
[45] J. Fountain,Perfect semigroups,Proc. Edinburgh Math. Soc. , 20(2) (1976), 87—93.
[46] J. Fountain,Right PP monoids with central idempotents,Semigroup Forum,13 (1977),229—237.
[47] J. Fountain,A class of right PP monoids,Quart. J. Math. Oxford, 28(1977), 285—300.
[48] J. Fountain, Abundant semigroups, Proc. London Math. Soc. , 44(3) (1982), 103—129.
[49] A. Golchin and J. Renshaw,Periodic monoids over which all flat cyclic right acts satisfy condition (P),Semigroup Forum,54(1997),261—263.
[50] Z. Goseki, On ρ-irreducible S-subsets of an S-set, Semigroup Forum, 47 (1993),215—222.
[51] Z. Goseki,On P-semisimple S-sets,Semigroup Forum,47(1993),15—28.
[52] Z. Goseki and H. J. Weinert,On P-injective hulls of S-sets,Semigroup Forum, 31(1985),281—295.

[53] V. A. R. Gould, The characterization of monoids by properties of their S -systems, Semigroup Forum, 32(1985), 251—265.

[54] V. A. R. Gould, Completely right pure monoids, Proc. R. Ir. Acad., 87A(1987), 73—82.

[55] V. A. R. Gould, Divisible S -systems and R -modules, Proc. Edinburgh Math. Soc., 30(1987), 187—200.

[56] V. A. R. Gould, Coperfect monoids, Glasgow Math. J., 29(1987), 73—88.

[57] V. A. R. Gould, Model companions of S -systems, Quart. J. Math. Oxford, 38 (1987), 189—211.

[58] V. A. R. Gould, Axiomatisability problems for S -systems, J. London Math. Soc., 35(1987), 193—201.

[59] V. A. R. Gould, Completely right pure monoids on which H is a right congruence, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 107(1990), 275—285.

[60] V. A. R. Gould, Completely right pure monoids: the General case, Mathematika, 38(1991), 77—88.

[61] V. A. R. Gould, Coherent monoids, J. Austral. Math. Soc. (Series A), 53 (1992), 166—182.

[62] H. Grassmann, On factor S -sets of monoids modulo submonoids, Semigroup Forum, 18(1979), 163—172.

[63] Y. Q. Guo, Some characterizations of right C -rpp semigroup, to appear.

[64] Y. Q. Guo, Structure of the weakly left C -semigroups, Chinese Science Bull., 41(1996), 462—467.

[65] Y. Q. Guo, K. P. Shum and P. Y. Zhu, The structure of left C -rpp semigroups, Semigroup Forum, 50(1995), 9—23.

[66] T. E. Hall, On orthodox semigroups and uniform and antiuniform bands, J. Algebra, 16(1970), 204—217.

[67] T. E. Hall, Orthodox semigroups, Pacific J. Math., 39(1971), 677—686.

[68] T. E. Hall, On regular semigroups, J. Algebra, 24(1973), 1—24.

[69] T. E. Hall, Representation extension and amalgamation for semigroups, Quart. J. Math. Oxford, 29(2)(1978), 309—334.

[70] J. Howie, An Introduction to Semigroup Theory, Academic Press, London, 1976.

[71] J. Isbell, Perfect monoids, Semigroup Forum, 2(1971), 95—118.

[72] J. Isbell, Beatific semigroups, J. Algebra, 23(1972), 228—238.

[73] Jr. C. S. Johnson and F. R. McMorris, Injective hulls of certain S -systems over a semilattice, Proc. Amer. Math. Soc., 32(1972), 371—375.

[74] M. Kilp, On flat polygons, Uch. Zap. Tartu Un-ta, 253(1970), 66—72.

[75] M. Kilp, On homological classification of monoids, Siberian Math. J., 13(1972), 396—401.

[76] M. Kilp, Commutative monoids all of whose principal ideals are projective, Semigroup Forum, 6(1973), 334—339.

[77] M. Kilp, On the homological classification of monoids by properties of their left ideals, Acta et commentationes Universitatis Tartuensis, 336(1974), 178—188.

[78] M. Kilp, Left completely flat monoids that are unions of groups, Tartu Riikl. Ul. Toimetised, 556(1981), 33—37.

[79] M. Kilp, Characterization of monoids by properties of their left Rees factors, Uch. Zap. Tartu Un-ta, 640(1983), 29—37.

[80] M. Kilp, On completely flat monoids, Tartu Riikl. Ul. Toimetised, 700(1985), 32—37.

[81] M. Kilp, Strong flatness of flat cyclic left acts, Uch. Zap. Tartu Un-ta, 700 (1985), 38—41.

[82] M. Kilp, Wreath products of acts over monoids. Ⅳ. principally weakly flat acts, Tartu Riikl. Ul. Toimetised, 878(1990), 59—66.

[83] M. Kilp and U. Knauer, On free, projective, and strongly flat acts, Arch. Math., 47(1986), 17—23.

[84] M. Kilp and U. Knauer, Characterization of monoids by properties of regular acts, J. Pure Appl. Algebra, 46(1987), 217—231.

[85] M. Kilp and U. Knauer, Characterization of monoids by properties of faithful and strongly faithful acts, Tartu Riikl. Ul. Toimetised, 764(1987), 39—48.

[86] M. Kilp and U. Knauer, Characterization of monoids by properties of generators, Comm. Algebra, 20(7)(1992), 1841—1856.

[87] M. Kilp, U. Knauer and A. V. Mikhalev, Wreath products of acts over monoids. Ⅰ. torsion-free and divisible acts, J. Pure Appl. Algebra, 58(1989), 19—27.

[88] M. Kilp and A. Kubjas, Wreath products of acts over monoids. Ⅱ. principally weakly injective acts, Tartu Riikl. Ul. Toimetised, 764(1987), 49—52.

[89] J. P. Kim and Y. S. Park, Injective hulls of S-systems over a Clifford semigroup, Semigroup Forum, 43(1991), 19—24.

[90] U. Knauer, Column monomic matrix monoids, Math. Nachr., 74(1976), 135—141.

[91] U. Knauer, Unretractive and S-unretractive joins and lexicographic products of graphs, J. Graph Theory, 11(1987), 429—440.

[92] U. Knauer, Projectivity of acts and Morita equivalence of monoids, Semigroup Forum, 3(1972), 359—370.

[93] U. Knauer, Characterization of monoids by properties of finitely generated right acts and their right ideals, Lecture Notes in Math., 998(1983), 310—332.

[94] U. Knauer and A. V. Mikhalev, Endomorphism monoids of acts over monoids, Semigroup Forum, 6(1973), 50—58.

[95] U. Knauer and A. V. Mikhalev, Endomorphism monoids of free acts and 0-wreath products of monoids. I. Annihilator properties, Semigroup Forum, 19 (1980), 177—187.

[96] U. Knauer and A. V. Mikhalev, Endomorphism monoids of free acts and 0-wreath products of monoids. II. Regularity, Semigroup Forum, 19(1980), 189—198.

[97] U. Knauer and A. V. Mikhalev, Endomorphism monoids of free acts and 0-wreath products of monoids. III. Standard involution and continuous endomorphisms, Semigroup Forum, 19(1980), 355—369.

[98] U. Knauer and A. V. Mikhalev, Wreath products of ordered semigroups, I. General properties, idempotent and regular cartesian isotone wreath products, Semigroup Forum, 27(1983), 331—350.

[99] U. Knauer and A. V. Mikhalev, Wreath products of ordered semigroups, II. Inverse ordered wreath products, Semigroup Forum, 31(1985), 181—191.

[100] U. Knauer and A. V. Mikhalev, Center and commutativity for wreath products of ordered semigroups, Arch. Math., 44(1985), 397—402.

[101] U. Knauer and A. V. Mikhalev, Wreath products of acts over monoids. I. Regular and inverse acts, J. Pure Appl. Algebra, 51(1988), 251—260.

[102] U. Knauer and A. V. Mikhalev, Endomorphism monoids of generators in the category of S-acts, Proc. of the Conference on Semigroups with Applications, Oberwolfach, 1991, World Scientific, Singapore.

[103] U. Knauer and M. Nieporte, Endomorphisms of graphs I. The monoids of strong endomorphisms, Arch. Math., 52(1989), 607—614.

[104] U. Knauer and P. Normak, Hereditary endomorphism monoids of projective acts, Manuscripta Mathematica, 70(1991), 133—143.

[105] U. Knauer and P. Normak, Morita duality for monoids, Semigroup Forum, 40 (1990), 39—57.

[106] U. Knauer and M. Petrich, Characterization of monoids by torsion-free, flat, projective, and free acts, Arch. Math., 36(1981), 289—294.

[107] Ju. Koselev, Wreath product and equations in semigroups, Semigroup Forum, 11(1975), 1—13.

[108] Z. K. Liu, A characterization of regular monoids by flatness of left acts, Semi-

group Forum, 46(1993), 85—89.

[109] Z. K. Liu, Characterization of monoids by condition (P) of cyclic left acts, Semigroup Forum, 49(1994), 31—39.

[110] Z. K. Liu, Monoids over which all regular left acts are flat, Semigroup Forum, 50(1995), 135—139.

[111] Z. K. Liu, Monoids over which all flat left acts are regular, J. Pure Appl. Algebra, 111(1996), 199—203.

[112] 刘仲奎，关于左完全幺半群，数学学报，38(6)(1995)，817—823.

[113] 刘仲奎，强忠实右 S-系，数学杂志，15(4)(1995)，429—435.

[114] 刘仲奎，关于 S-系的纯性，数学杂志，16(2)(1996)，151—156.

[115] 刘仲奎，L-逆左系对幺半群的刻画，数学研究与评论，16(3)(1996)，413—420.

[116] 刘仲奎，完全 α-绝对纯幺半群，数学杂志，18(2)(1998)，191—195..

[117] Z. K. Liu, Characterization of inverse and left inverse semigroups by their S^1-acts, Northeastern Math. J., 12(4)(1996), 395—401.

[118] Z. K. Liu and J. Ahsan, A generalization of regular left S-acts, Northeastern Math. J., 13(2)(1997), 169—176.

[119] Z. K. Liu and J. Ahsan, Completely right FSF-injective monoids, to appear.

[120] Z. K. Liu and Y. B. Yang, Monoids over which every flat right act satisfies condition (P), Comm. Algebra, 22(8)(1994), 2861—2875.

[121] A. M. Lopez and J. K. Luedeman, Quasi-injective S-systems and their S-endomorphism semigroups, Czechoslovak Math. J., 29(104)(1979), 97—104.

[122] J. K. Luedeman, Torsion theories and semigroups of quotients, Lecture Notes in Math., 998(1983), 350—373.

[123] J. K. Luedeman, Morita equivalent semigroups of quotients, Proc. Amer. Math. Soc., 80(1980), 219—222.

[124] J. K. Luedeman, F. R. McMorris and Soon-Kiong Sim, Semigroups for which every totally irreducible S-system is injective, Comment. Math. Univ. Carolinae, 19(1978), 27—35.

[125] W. D. Munn, Uniform semilattices and bisimple inverse semigroups, Quart. J. Math. Oxford, 17(1966), 151—159.

[126] P. Normak, On Noetherian and finitely presented M-sets, Uc. Zap. Tartu Gos. Univ., 431(1977), 37—46.

[127] P. Normak, Purity in the category of M-sets, Semigroup Forum, 20(1980), 157—170.

[128] P. Normak, Analogies of QF-rings for monoids I, Uch. Zap. Tartu Un-ta, 640

(1983),38—47.

[129] P. Normak, Strong flatness and projectivity of the wreath products of acts, Abelevye gruppy i moduli, Tomsk, 1982, 158—165.

[130] P. Normak, On equalizer-flat and pullback-flat acts, Semigroup Forum, 36 (1987), 293—313.

[131] J. Renshaw, Flatness and amalgamation in monoids, J. London Math. Soc., 33 (2)(1986), 73—88.

[132] J. Renshaw, Extension and amalgamation in monoids and semigroups, Proc. London Math. Soc., 52(3)(1986), 119—141.

[133] J. Renshaw, Perfect amalgamation bases, J. Algebra, 141(1991), 78—92.

[134] J. G. Rosenstein, Linear Orderings, Academic Press, 1982.

[135] J. Rotman, An Introduction to Homological Algebra, Academic Press, New York, 1979.

[136] T. Saito, Orthodox semidirect products and wreath products of monoids, Semigroup Forum, 38(1989), 347—354.

[137] M. Satyanarayana, Quasi and weakly injective S-systems, Math. Nachr., 71(1976), 183—190.

[138] B. M. Schein, Injective monars over inverse semigroups, Colloq. Math. Soc., Janos Bolyai 20, Algebraic theory of semigroups, Szeged (Hungary), 1976, 519—544.

[139] B. M. Schein, Injective S-acts over inverse semigroups, Notices Amer. Math. Soc., 23(1976), Abstract 76T—A254.

[140] K. Shoji, Injective hulls of certain right reductive semigroups as right S-systems, Mem. Fac. Sci. Shimane Univ., 14(1980), 25—34.

[141] K. Shoji, Self-injective non-singular semigroups, Proc. of 3rd Symposium on Semigroups, 1979, 69—78.

[142] K. Shoji, Completely right injective semigroups, Math. Japonica, 24 (1980), 609—615.

[143] K. Shoji, Right self-injective semigroups are absolutely closed, Mem. Fac. Sci. Shimane Univ., 14(1980), 35—39.

[144] K. Shoji, On right self-injective regular semigroups, Semigroup Forum, 25 (1982), 51—71.

[145] K. Shoji, On right self-injective regular semigroups, Ⅱ, J. Austral. Math. Soc. (Series A), 34(1983), 182—198.

[146] K. Shoji, On self-injective semigroups satisfying the minimal conditions, Semigroup Forum, 28(1984), 47—60.

[147] K. Shoji, Completions and injective hulls of E -reflexive inverse semigroups, Semigroup Forum, 36(1987), 55—68.

[148] K. Shoji, Absolute flatness of the full transformation semigroups, J. Algebra, 118(1988), 477—486.

[149] K. Shoji, On right self-injective, right non-singular semigroups, Mem. Fac. Sci. Shimane Univ., 26(1992), 43—53.

[150] K. Shoji, Amalgamation bases for semigroups, Math. Japonica, 35(1990), 473—483.

[151] K. Shoji, Absolute flatness of regular semigroups with a finite height function, Semigroup Forum, 52(1996), 133—140.

[152] L. A. Skornjakov, On the homological classification of monoids, Siberian Math. J., 10(1969), 1139—1142.

[153] L. A. Skornjakov, Regularity of the wreath products of monoids, Semigroup Forum, 18(1979), 83—86.

[154] B. Stenstrom, Flatness and localization over monoids, Math. Nachr., 48(1970), 315—334.

[155] S. Talwar, Morita equivalence for semigroups, J. Austral. Math. Soc. (Series A), 59(1995), 81—111.

[156] S. Talwar, Strong Morita equivalence and a generalisation of the Rees theorem, J. Algebra, 181(1996), 371—394.

[157] Tran Lam Hach, Characterization of monoids by regular acts, Period. Sci. Math. Hung., 16(1985), 273—279.

[158] N. Wang and Z. K. Liu, Monoids over which all strongly flat left acts are regular, Comm. Algebra, 26(6) (1998), 1863—1866.

[159] H. J. Weinert, S -sets and semigroups of quotients, Semigroup Forum, 19 (1980), 1—78.

[160] Yamura, Indecomposable completely simple semigroups except groups, Osaka Math. J., 8(1956), 35—42.

[161] R. Z. Zhang, W. M. Gao and F. Y. Xu, Torsion theories and quasi-filters of right congruences, Algebra Colloq., 1(3)(1994), 273—280.

[162] P. Y. Zhu, Y. Q. Guo and K. P. Shum, Structure and characterizations of left C -semigroups, Science in China, Ser. A, (6) (1991), 582—590.